karam.fayad@eisti.eu

Corrigé Partiel d'Algèbre - Janvier 2019

Exercice 1 .

1. On a $P(1) = 6 - 19 + 19 - 3 - 5 + 2 = 0$. Donc 1 est bien une racine de P.
   $P(X) = 30X^4 - 76X^3 + 57X^2 - 6X - 5$ et $P'(1) = -46 + 51 - 5 = 0$. Donc 1 est une racine au moins double de P.
   $P''(X) = 120X^3 - 228X^2 + 114X - 6$ et $P''(1) = 234 - 234 = 0$. Donc 1 est une racine au moins triple de P.
   $P^{(3)}(X) = 360X^2 - 456X + 114$ et $P^{(3)}(1) = 474 - 456 \neq 0$. Donc 1 est une racine triple de P.
2. Comme 1 est une racine triple de P, alors P est divisible par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^3$ est $Q = 6X^2 - X - 2$.
   Les racines de Q sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$. On déduit que
   $$\boxed{P = 6(X-1)^3\left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right) = (X-1)^3(3X-2)(2X+1)}$$
3. Les racines de P sont donc : 1 (racine triple), $\frac{2}{3}$ (racine simple) et $-\frac{1}{2}$ (racine simple).

Exercice 2 .

La fraction rationnelle F est sous forme irréductible, de degré $-5 < 0$, donc sa partie entière est nulle.

• Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^4-1)(X-1) = (X^2+1)(X^2-1)(X-1) = (X^2+1)(X-1)^2(X+1)$. Ainsi, 1 est un pôle double de F et -1 est un pôle simple de F. La DES de F dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit alors, pour (a,b,c,d,e) unique dans $\mathbb{R}^5$:
$$F = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{dX+e}{X^2+1}.$$
En multipliant par $X+1$, en simplifiant puis en évaluant en -1, on trouve $c = \frac{1}{8}$.
En multipliant par $(X-1)^2$, en simplifiant puis en évaluant en 1, on trouve $b = \frac{1}{4}$.
En multipliant par X^2+1, en simplifiant puis en évaluant en i, on trouve $di + e = \frac{1}{(i-1)^2(i+1)} = \frac{1}{4}(1+i)$.
Ainsi $d = e = \frac{1}{4}$.
Il reste à trouver a, on peut par exemple évaluer en 0, on trouve : $-a + b + c + e = 1$, d'où $a = -\frac{3}{8}$.
Ainsi dans $\mathbb{R}(X)$,
$$\boxed{F = -\frac{3}{8(X-1)} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{1}{8(X+1)} + \frac{X+1}{4(X^2+1)}}$$

• Dans $\mathbb{C}[X]$, $(X^4-1)(X-1) = (X-i)(X+i)(X+1)(X-1)^2$. La fraction F possède trois pôles simples : -1, i et $-i$ et un pôle double : 1. Sa DES dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit alors, pour (a,b,c,α,β) unique dans $\mathbb{C}^5$:
$$F = \frac{1}{(X-i)(X+i)(X+1)(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{X+i}.$$
Les coefficients a, b et c sont déjà calculés. De plus, comme F est à coefficients réels, on déduit que $\beta = \overline{\alpha}$.
Pour calculer α, on multiplie par $X - i$, on simplifie et on évalue en i, on obtient : $\alpha = \frac{1}{2i(i+1)(i-1)^2} = \frac{1}{8}(1-i)$.

Puis $\beta = \frac{1}{8}(1+i)$.
Ainsi dans $\mathbb{C}(X)$,

$$\boxed{F = -\frac{3}{8(X-1)} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{1}{8(X+1)} + \frac{1-i}{8(X-i)} + \frac{1+i}{8(X+i)}}$$

Exercice 3 .

1. L'application f n'est pas injective car par exemple $f(0,1) = f(1,0)$.
   (plus généralement $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).
2. Par définition :
   $$\boxed{f^{-1}(\{(a,b)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (a,b)\}}$$
3. (a) Si $(x,y) \in f^{-1}(\{(a,b)\})$, alors $f(x,y) = (a,b)$, alors $x+y = a$ et $xy = b$.
   Vérifions que x est racine du polynôme $X^2 - aX + b$: $x^2 - ax + b = x^2 - x(x+y) + xy = 0$.
   De même pour y. Ainsi x et y sont racines de $X^2 - aX + b$.

   (b) Si $f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) \in f^{-1}(\{(a,b)\})$. D'après la question précédente, comme x et y sont racines réelles de $X^2 - aX + b$, on déduit que le discriminant de ce polynôme est positif ou nul. Ainsi, la condition nécessaire cherchée est $a^2 - 4b \geq 0$.

   (c) La condition $a^2 - 4b \geq 0$ est suffisante. En effet, si $a^2 - 4b \geq 0$, alors $X^2 - aX + b$ possède deux racines réelles $x = \frac{a + \sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $y = \frac{a - \sqrt{a^2-4b}}{2}$ dont la somme vaut a et le produit vaut b.
   Ainsi $(x,y) \in f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset$.

   (d) On a d'après précédemment : $(x,y) \in f^{-1}(\{(a,b)\}) \Leftrightarrow$ x et y sont racines de $X^2 - aX + b$.
   Ainsi
   $$\boxed{f^{-1}(\{(a,b)\}) = \left\{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right), \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)\right\}}$$
   Remarque (pas nécessaire) : si $a^2 - 4b = 0$, $f^{-1}(\{(a,b)\}) = \left\{\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)\right\}$.
4. (a) D'après les questions précédentes, si $a^2 - 4b < 0$, alors $f^{-1}(\{(a,b)\}) = \emptyset$, alors (a,b) ne possède pas d'antécédent par f. Ainsi f n'est pas surjective.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
   $(a,b) \in f(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow\ \exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0$.
   Conclusion :
   $$\boxed{f(\mathbb{R}^2) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 - 4b \geq 0\}}$$

Exercice 4 .

1. Supposons qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = (A(x))^2 + (B(x))^2 \geq 0$. Ainsi, P est positif.
2. Il suffit de remarquer que :
   (a) $X^2 + 1 = X^2 + 1^2$

   (b) $(X-2)^2(X^2+1) = (X-2)^2X^2 + (X-2)^2 = (X^2 - 2X)^2 + (X-2)^2$

   (c) $(X-a)^{2n} = ((X-a)^n)^2 + 0^2$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif non nul, notons $\lambda \neq 0$ son coefficient dominant et n son degré. Ainsi le terme de plus haut degré de P est λX^n.

(a) Par l'absurde, si n est impair, alors :
-si $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\lambda x^n) = -\infty$
-si $\lambda < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\lambda x^n) = -\infty$
Dans les deux cas, P prend des valeurs strictement négatives : absurde car P est positif. On en déduit que n est pair.

(b) Par l'absurde, si $\lambda < 0$, sachant que n est pair, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\lambda x^n) = -\infty$: absurde car P est positif. On en déduit que $\lambda > 0$.

4. (a) On sait que $Q(\alpha) \neq 0$ (d'après les caractérisations de la multiplicité d'une racine). En effet, sinon on a : $X - \alpha$ divise Q donc $(X-\alpha)^{m+1}$ divise P : absurde car α est une racine de P de multiplicité m.
   (b) Si m est impair, alors $(x-\alpha)^m < 0$ si $x < \alpha$ et $(x-\alpha)^m > 0$ si $x > \alpha$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x) \geq 0$, ainsi Q est du même signe que $(x-\alpha)^m$, d'où $Q(\alpha) = 0$ par continuité de Q.
   (c) D'après les deux questions précédentes, on déduit que m est pair (car sinon, on a $Q(\alpha) = 0$ ce qui est absurde).
5. On écrit S sous forme canonique, sous l'hypothèse que $4c - b^2 \geq 0$:

$$\boxed{S = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2}$$

   Ainsi S est bien somme de deux carrés.
6. (a) simple vérification
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence que le produit de n polynômes $P_1, \cdots, P_n$ chacun somme de deux carrés est somme de deux carrés :
   - initialisation : pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer (on peut initialiser à $n = 2$ en utilisant le résultat de la question précédente)
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons la propriété vraie pour le produit de $n-1$ polynômes, alors $P_1 \cdots P_n = (P_1 \cdots P_{n-1})P_n$, avec P_n est somme de deux carrés, et d'après l'hypothèse de récurrence $P_1 \cdots P_{n-1}$ l'est aussi, ainsi, d'après la question précédente, P_n est somme de deux carrés.
7. Soit P un polynôme positif. On écrit la factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}}$$

   avec $\lambda \geq 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles de P de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$, et pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $b_j^2 - 4c_j < 0$.
   D'après la question 4), tous les m_i sont pairs, ainsi chaque $(X-\alpha_i)^{m_i}$ est somme de deux carrés (question 1)c)). D'après la question 5), chaque $X^2 + b_j X + c_j$ est somme de deux carrés. Ainsi, P, qui est produit de polynômes des deux types précédents (à une constante positive λ près), est somme de deux carrés, d'après la question 6)b).

Exercice 5 .

1. Soit x le nombre de sushis commandés. On a :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

2. On peut d'abord résoudre un système de deux équations parmi les trois précédentes, puis résoudre le système obtenu en mettant la solution trouvée avec la troisième équation.

On peut également appliquer le théorème donné avec $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$, $(m_1, m_2, m_3) = (3, 5, 7)$, $M = m_1 m_2 m_3 = 105$ et $(M_1, M_2, M_3) = (35, 21, 15)$.
y_1 est un entier vérifiant $35y_1 \equiv 1 \pmod 3$, c.-à-d. y_1 est l'inverse de 35 modulo 3. Une identité de Bézout entre 3 et 35 est $35 \times (-1) + 3 \times 12 = 1$, ainsi on prend par exemple $y_1 = -1$.
De même, y_2 est l'inverse de 21 modulo 5. On prend par exemple $y_2 = 1$ (car $21 \equiv 1 \pmod 5$). Et y_3 est l'inverse de 15 modulo 7, on prend par exemple $y_3 = 1$ (car $15 \equiv 1 \pmod 7$).
On trouve ainsi $a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 = 52$. D'où $x \equiv 52 \pmod{105}$, c.-à-d. x s'écrit $x = 52 + 105k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le seul entier $x \in [\![300, 450]\!]$ qui convient est $x = 52 + 3 \times 105 = 367$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Le nombre de sushis commandés est } 367}$$