EISTI	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 2** *Safaa El Sayed, Karam Fayad*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 18 novembre 2016**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices (dont un bonus). L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)
On considère quatre ensembles A, B, C et D et trois applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$. Montrer que :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
3. ($g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives) $\Longleftrightarrow$ (f, g et h sont bijectives)

Exercice 2. (4 points)

1. Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, on définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Longleftrightarrow pq' = p'q$.
   Monter que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant, pour tout couple (X, Y) de parties de E :
   $$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$
   Expliciter la classe d'équivalence $[\emptyset]$ de l'ensemble vide.

Exercice 3. (7 points)
On considère les deux applications f et g de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ données par : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$$f(m,n) = mn \quad \text{et} \quad g(m,n) = 2^m 3^n.$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
2. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Déterminer les ensembles suivants :
   (a) $f(\mathbb{P} \times \mathbb{I})$
   (b) $f^{-1}(\mathbb{P})$
   (c) $f^{-1}(\mathbb{I})$
   (d) $g(\{0\} \times \mathbb{P})$
   (e) $g^{-1}(\mathbb{P})$
   (f) $g^{-1}(\{7, 27\})$

Exercice 4. (5 points)
Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties de Y,
   $$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$
2. On suppose que f est injective. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X,
   $$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Exercice 5. (BONUS)
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$. Montrer qu'on a en fait $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.