

	Cycle préparatoire 1^{ère} année Devoir surveillé 4 <i>N. Arancibia, S. El Sayed, K. Fayad, J.-M. Masereel</i>	
	<i>Matière : Algèbre</i>	<i>Date : Vendredi 9 mars 2018</i>
	Appareils électroniques et documents interdits	Durée : 2 heures
		<i>Nombre de pages : 2</i>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+4)}.$$

Exercice 2. (5 points)

On munit l'ensemble \mathbb{Z}^2 de la loi de composition interne \star définie par :

$$(m, n) \star (m', n') = (m + (-1)^n m', n + n').$$

1. Montrer que (\mathbb{Z}^2, \star) est un groupe (dont on précisera l'élément neutre et l'inverse de chaque élément).
2. Ce groupe est-il abélien ? Justifier.
3. On considère les parties suivantes de \mathbb{Z}^2

$$H = \{(a, 0), a \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad K = \{(0, b), b \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que H et K sont des sous-groupes de (\mathbb{Z}^2, \star) .

Exercice 3. (5 points) *Anneau des entiers de Gauss*

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, muni de l'addition et de la multiplication des complexes, est un anneau.
On pourra montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. On considère l'application

$$N : \begin{array}{ll} \mathbb{Z}[i] & \longrightarrow \mathbb{N} \\ a + ib & \longmapsto a^2 + b^2 \end{array}$$

- (a) Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2, N(zz') = N(z)N(z')$.
- (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que : z est inversible dans $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow N(z) = 1$.
- (c) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 4. (3 points)

On considère sur \mathbb{N} la loi de composition interne \star définie, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, par :

$$m \star n = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & \text{si } m+n \text{ est pair} \\ \frac{m+n-1}{2} & \text{si } m+n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Montrer que le magma (\mathbb{N}, \star) est commutatif et non associatif.
2. Montrer que la magma (\mathbb{N}, \star) ne possède pas d'élément neutre.

Indication : On pourra montrer qu'il ne possède pas d'élément neutre pair, ni d'élément neutre impair.

Exercice 5. (4 points)

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $x \oplus y = xy$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\lambda \odot x = x^\lambda$.

$(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ? Justifier.