Cycle Préparatoire - Deuxième année
Semestre 2 - 2016/2017
karam.fayad@eisti.eu

Exercices supplémentaires
Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 . Soient E un espace préhilbertien réel et $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille de vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall\ x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i \rangle^2.$$

1. Montrer que $(a_1, \cdots, a_n)$ est une famille orthogonale.
2. Soient $u \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \langle u, a_i \rangle a_i$. Montrer que $||u - y|| = 0$.
3. En déduire que $(a_1, \cdots, a_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 2 . On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de l'application $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$ où ${}^t A$ désigne la tranposée de A et tr la trace.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices réelles symétriques d'ordre n et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices réelles antisymétriques d'ordre n.

1. Montrer que $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors $A \perp B$.
   (b) Montrer que toute matrice de E est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
   (c) En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer $(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$ et $(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall\ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(MA) = \mathrm{tr}(MB)$. Montrer que $A = B$.
4. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $\mathrm{d}(M, \mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme f de E est dit symétrique s'il vérifie la propriéte suivante :

$$\forall\ (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Soient u un vecteur de E de norme 1, λ un réel non nul et $f_\lambda : E \longrightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in E$ par :

$$f_\lambda(x) = \lambda \langle x, u \rangle u + x.$$

1. Montrer que $E = \mathrm{vect}(u) \oplus \mathrm{vect}(u)^\perp$.
2. Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.
3. Montrer que $X^2 - (\lambda + 2)X + \lambda + 1$ est un polynôme annulateur de f_λ.
4. (a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Calculer $f_\lambda(u)$ puis $f_\lambda(v)$ pour $v \in \mathrm{vect}(u)$.
   (c) En déduire que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés.
5. Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
   (a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur, i.e. $f_{-1}^2 = f_{-1}$.
   (b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(u)^\perp$.