
Algèbre linéaire et bilinéaire
TD 1A - Réduction des endomorphismes

Exercice 1 . Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que A et tA ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A si et seulement si A est non inversible.
3. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
4. (a) Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $\forall k \in \mathbb{N}$, λ^k est une valeur propre de A^k .
(b) On suppose que $\det(A) \neq 0$.
Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} ; puis que $\forall k \in \mathbb{Z}$, λ^k est une valeur propre de A^k .

Exercice 2 . Soient f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si 0 est valeur propre de f^n .

Exercice 3 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la somme des termes de chaque ligne de A vaut 1. Montrer que 1 est une valeur propre de A .

Exercice 4 . Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = P - (X + 1)P'$.

1. Vérifier que φ définit un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E .
3. Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 5 . Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & f(A) = {}^tA \end{array}$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer les valeurs propres de f .

Exercice 6 . Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 . Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (X + 1)(X - 3)P' - XP.$$

Exercice 8 . Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
2. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle. Quel est le sous-espace propre associé ?
Que se passe-t-il si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Exercice 9 . Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$