| | Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année<br>Examen de fin de semestre<br>*Nelly Barrau, Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel* | |
|---|---|---|
| | *Matière* : **Algèbre** | *Date* : **Mercredi 23 janvier 2019** |
| | **Appareils électroniques et documents interdits** | *Durée* : **3 heures** |
| | | *Nombre de pages* : **3** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*
*Le barème (sur 30) est donné à titre indicatif.*

**Exercice 1.** (4 points)
Soit le polynôme $P = 6X^5 - 19X^4 + 19X^3 - 3X^2 - 5X + 2$.

1. Déterminer la multiplicité de 1 en tant que racine de $P$.
2. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P$.
3. En déduire les racines de $P$.

**Exercice 2.** (5 points)
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{(X^4-1)(X-1)}.$$

**Exercice 3.** (6 points)
Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

1. L'application $f$ est-elle injective ? Justifier.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donner la définition de l'ensemble $f^{-1}(\{(a,b)\})$.
3. Le but de cette question est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que $f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset$.
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que si $(x,y) \in f^{-1}(\{(a,b)\})$, alors $x$ et $y$ sont racines du polynôme $X^2 - aX + b$.
   (b) Déduire une condition nécessaire sur $a$ et $b$ pour que $f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset$.
   (c) La condition trouvée est-elle suffisante pour que $f^{-1}(\{(a,b)\}) \neq \emptyset$ ? Justifier.
   (d) Lorsque cette condition est satisfaite, déterminer explicitement l'ensemble $f^{-1}(\{(a,b)\})$.
4. (a) Que peut-on déduire sur la surjectivité de $f$ ?
   (b) Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R}^2)$.

**Exercice 4.** (10 points)
Le but de cet exercice est de montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$ (*On dira dans ce cas que $P$ est un polynôme positif*)

ii) $\exists\,(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2$ (*On dira dans ce cas que $P$ est somme de deux carrés*)

1. Justifier que ii)⇒i).
   *Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à montrer l'implication i)⇒ii).*
   *À titre d'exemple, le polynôme positif $(X-2)^2$ est bien somme de deux carrés car $(X-2)^2 = (X-2)^2 + 0^2$.*
2. Justifier que les polynômes positifs suivants sont somme de deux carrés :
   (a) $X^2 + 1$
   (b) $(X-2)^2(X^2+1)$
   (c) $(X-a)^{2n}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif non nul. En étudiant $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x)$,
   (a) Montrer que $\deg(P)$ est pair.
   (b) Montrer que le coefficient dominant de $P$ est positif.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de $P$ de multiplicité $m$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le quotient de la division euclidienne de $P$ par $(X-\alpha)^m$. On veut montrer que $m$ est pair.
   (a) Que peut-on dire de $Q(\alpha)$?
   (b) On suppose dans cette question que $m$ est impair. En étudiant le signe de la fonction $x \mapsto P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$, montrer que $Q(\alpha) = 0$.
   (c) Conclure.
5. Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b^2 - 4c \leq 0$. Montrer que le polynôme $S = X^2 + bX + c$ est somme de deux carrés.
   *On pourra écrire $S$ sous forme canonique, c.-à-d. trouver deux réels $u$ et $v$ tels que $S = (X+u)^2 + v^2$.*
6. Soit $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}[X]^4$.
   (a) Justifier que $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$.
   (b) En déduire que le produit de plusieurs polynômes qui sont somme de deux carrés est un polynôme qui est somme de deux carrés.
7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif. En utilisant les questions précédentes et la factorisation de $P$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que $P$ est somme de deux carrés.

**Exercice 5.** (5 points)
*Un restaurant japonais propose la livraison de sushis.*
*Pour ranger ses sushis, ce restaurant dispose de trois types de boites : des boites de 3, de 5 et de 7.*

*L'EISTI vient d'appeler et a commandé, pour un banquet, un certain nombre de sushis.*
*Quand on range ces sushis entièrement et uniquement :*

- *dans des boites de 3, il reste 1 seul sushi,*
- *dans des boites de 5, il reste 2 sushis,*
- *dans des boites de 7, il reste 3 sushis.*

*Sachant que l'EISTI a commandé entre 300 et 450 sushis, combien a-t-on commandé de sushis ? Pour répondre à la question précédente :*

1. Traduire le problème ci-dessus en système de congruences.
2. Résoudre le système précédent.
   *On pourra, si besoin, utiliser le théorème suivant :*

**Théorème des restes chinois**
Soit $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}$ supérieurs à 2, deux à deux premiers entre eux; et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$.
Le système d'équations

$$\begin{cases} x & \equiv & a_1 & \pmod{m_1} \\ x & \equiv & a_2 & \pmod{m_2} \\ & \vdots & & \\ x & \equiv & a_n & \pmod{m_n} \end{cases} \tag{1}$$

admet une unique solution modulo $M$

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots + a_n M_n y_n \pmod{M}$$

où $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$, et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ :

- $M_i = \dfrac{M}{m_i}$
- $y_i$ est un entier vérifiant $y_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.