



Classe préparatoire 1^{ère} année

Devoir surveillé n°2

Matière : Algèbre semestre 1	Date : 22/11/2013
Calculatrice autorisée : NON	Durée de l'épreuve : 2 heures
Téléphone portable et documents interdits	Nombre de pages du sujet : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

EXERCICE 1 (3 points)

Soit la relation binaire définie sur \mathbb{Z} par

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow 3 \mid (2q+p)$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
- 2) Déterminer la classe d'équivalence associée à 0.

EXERCICE 2 (4 points)

Soient E, F, G trois ensembles.

- 1) Soient trois applications telles que

$$f_1 : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad f_2 : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \rightarrow G$$

On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

- 2) Soient trois applications telles que

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g_1 : F \rightarrow G \quad \text{et} \quad g_2 : F \rightarrow G.$$

On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

EXERCICE 3 (2 points)

On considère un ensemble E, A une partie de E, et f une application de E dans E. Montrer que

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$$

EXERCICE 4 (4 points)

1) Pour tout $x \in [-1;1]$, calculer

$$\arcsin(x) + \arccos(x)$$

N.B. On rappelle les résultats montrés en TD

$$\forall x \in [-1 ; 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

2) Donner le domaine de définition de la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(\ln\sqrt{x^2-1})$$

N.B. On pourra s'aider des approximations suivantes

$$\sqrt{e^2+1} \approx 2,9 \quad \text{et} \quad \sqrt{e^{-2}+1} \approx 1,07$$

EXERCICE 5 (4 points)

1) Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer que

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad x^q \equiv y^q \pmod{p}$$

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que si n est pair, alors $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$.

(b) Montrer que si n est impair, alors $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

(a) $3^{2p} \equiv 1 \pmod{8}$

(b) $3^{2p+1} \equiv 3 \pmod{8}$

EXERCICE 6 (3 points)

Soit l'équation définie dans \mathbb{Z}^2 par

$$12x - 19y = 2 \quad (1)$$

1) Pourquoi l'équation

$$12x - 19y = 1 \quad (2)$$

admet-elle une solution ?

2) Trouver une solution particulière à l'équation (2)

3) En déduire une solution générale de l'équation (2)

4) En déduire les solutions de l'équation (1)

CORRECTION

EXERCICE 1

1) Réflexive

Soient $p \in \mathbb{Z}$. On a

$$2p+p=3p \Rightarrow 3|(2p+p) \Rightarrow p\mathcal{R}p$$

Donc \mathcal{R} est réflexive

Symétrique

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $p\mathcal{R}q$. On a alors

$$3|(2p+q) \Rightarrow 2p+q=3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow q=3k-2p$$

$$\Rightarrow 2q+p=2(3k-2p)+p=3(2k-p)=3k' \text{ où } k'=2k-p \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3|(2q+p) \Rightarrow q\mathcal{R}p$$

Transitive

Soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Z}$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. On a alors

$$3|(2p+q) \text{ et } 3|(2q+r) \Rightarrow 2p+q=3k, k \in \mathbb{Z} \text{ et } 2q+r=3k', k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2p=3k-q \text{ et } r=3k'-2q$$

$$\Rightarrow 2p+r=3k-q+3k'-2q=3(k+k'-q)=3k'' \text{ où } k''=k+k'-q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3|(2p+r) \Rightarrow p\mathcal{R}r$$

$$2) p \in \mathcal{R}(0) \Leftrightarrow p\mathcal{R}0 \Leftrightarrow 3|(2 \times 0 + p) \Leftrightarrow p=3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } \mathcal{R}(0)=3\mathbb{Z}$$

EXERCICE 2

$$1) g \circ f_1 = g \circ f_2 \Leftrightarrow \forall x \in E, g \circ f_1(x) = g \circ f_2(x) \Leftrightarrow \forall x \in E, g[f_1(x)] = g[f_2(x)] \Rightarrow \forall x \in E, f_1(x) = f_2(x) \text{ car } g \text{ injective} \Rightarrow f_1 = f_2$$

$$2) \text{ On doit montrer que } g_1 = g_2 \Leftrightarrow \forall y \in F, g_1(y) = g_2(y).$$

Soit $y \in F$. Il existe $x \in E$ tel que $y=f(x)$ car f surjective donc

$$\begin{aligned} g_1(y) &= g_1[f(x)] = g_1 \circ f(x) \\ &= g_2 \circ f(x) \text{ car } g_1 \circ f = g_2 \circ f \\ &= g_2[f(x)] = g_2(y) \end{aligned}$$

Donc $g_1 = g_2$.

EXERCICE 3

- Montrons que $f^{-1}(\overline{A}) \subset \overline{f^{-1}(A)}$

Soit $x \in f^{-1}(\overline{A})$ alors $f(x) \in \overline{A}$ d'où $f(x) \notin A$ d'où $x \notin f^{-1}(A)$ d'où $x \in \overline{f^{-1}(A)}$.

- Montrons que $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$

Soit $x \in \overline{f^{-1}(A)}$ alors $x \notin f^{-1}(A)$ donc $f(x) \notin A$ donc $f(x) \in \overline{A}$ donc $x \in f^{-1}(\overline{A})$.

EXERCICE 4

2)

$$\begin{aligned} \cos[\arcsin(x) + \arccos(x)] &= \cos[\arcsin(x)]\cos[\arccos(x)] - \sin[\arcsin(x)]\sin[\arccos(x)] \\ &= x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2 \text{ [} 2\pi \text{]} \text{ ou } \arcsin(x) + \arccos(x) = -\pi/2 \text{ [} 2\pi \text{]}$$

- Si $x \in [-1;0]$ alors $\arcsin(x) \in [-\pi/2;0]$ et $\arccos(x) \in [\pi/2;\pi]$ donc $\arcsin(x)+\arccos(x) \in [0;\pi]$ d'où $\arcsin(x)+\arccos(x)=\pi/2$
- Si $x \in [0;1]$ alors $\arcsin(x) \in [0;\pi/2]$ et $\arccos(x) \in [0;\pi/2]$ donc $\arcsin(x)+\arccos(x) \in [0;\pi]$ d'où $\arcsin(x)+\arccos(x)=\pi/2$

Conclusion,

$$\forall x \in [-1;1], \arcsin(x)+\arccos(x)=\pi/2$$

2)

- La fonction racine est définie sur \mathbb{R}_+ , il faut donc que $x^2-1 \geq 0$, c-a-d $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. On a alors $\sqrt{x^2-1} \geq 0$.
- La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* , il faut donc que $\sqrt{x^2-1} > 0$, c-a-d $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. On a alors $\ln(\sqrt{x^2-1}) \in \mathbb{R}$.

Notons $D_1 =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

- La fonction \arccos est définie sur $[-1;1]$, il faut donc que $\ln(\sqrt{x^2-1}) \in [-1;1]$
 $\Leftrightarrow -1 \leq \ln(\sqrt{x^2-1}) \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq \sqrt{x^2-1} \leq e$ car exponentielle strictement croissante
 $\Leftrightarrow e^{-2} \leq x^2-1 \leq e^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+
 $\Leftrightarrow e^{-2}+1 \leq x^2 \leq e^2+1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{e^{-2}+1} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{e^2+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+
 $\Leftrightarrow \sqrt{e^{-2}+1} \leq |x| \leq \sqrt{e^2+1} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{e^2+1}$ et $\sqrt{e^{-2}+1} \leq |x|$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{e^2+1} \leq x \leq \sqrt{e^2+1}$ et $(\sqrt{e^{-2}+1} \leq x \text{ ou } x \leq -\sqrt{e^{-2}+1})$
 $\Leftrightarrow \{-\sqrt{e^2+1} \leq x \leq \sqrt{e^2+1} \text{ et } \sqrt{e^{-2}+1} \leq x\}$ ou $\{-\sqrt{e^2+1} \leq x \leq \sqrt{e^2+1} \text{ et } x \leq -\sqrt{e^{-2}+1}\}$
 $\Leftrightarrow \{-2,9 \leq x \leq 2,9 \text{ et } 1,07 \leq x\}$ ou $\{-2,9 \leq x \leq 2,9 \text{ et } x \leq -1,07\}$
 $\Leftrightarrow x \in [-2,9;-1,07] \cup [1,07;2,9]$

On note que $[-2,9;-1,07] \cup [1,07;2,9] \subset D$

Donc le domaine de définition est

$$[-2,9;-1,07] \cup [1,07;2,9] = \left[-\sqrt{e^2+1};-\sqrt{e^{-2}+1}\right] \cup \left[\sqrt{e^2+1};\sqrt{e^{-2}+1}\right]$$

EXERCICE 5

1) Cf. TD

2) a) On suppose que n est pair. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

Si k est pair, il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2s$. Donc $n = 4s$ et $n^2 = 16s^2 = 8(2s^2)$.

Or $2s^2 \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$.

Si k est impair, il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2s + 1$. Donc $n = 4s + 2$ et $n^2 = 16s^2 + 16s + 4 = 8(2s^2 + 2s) + 4$. Or, $2s^2 + 2s \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$.

Ainsi, $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$.

b) On suppose que n est impair. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Si k est pair, il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2s$. Donc $n = 4s + 1$ et $n^2 = 16s^2 + 16s + 1 = 8(2s^2 + 2s) + 1$. Or, $2s^2 + 2s \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Si k est impair, il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2s + 1$. Donc $n = 4s + 3$ et $n^2 = 16s^2 + 24s + 9 = 8(2s^2 + 3s + 1) + 1$. Or, $2s^2 + 3s + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Ainsi, $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

- 3) a) On a $3^{2^p} = (3^2)^{2^{p-1}}$. Or, $9 \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow 3^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2^p} \equiv 1 \pmod{8}$ (d'après la question 1 car $1^{2^p}=1$)
b) On a $3^{2^p+1} = 3^{2^p} \times 3$. Comme $3^{2^p} \equiv 1 \pmod{8}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2^p} = 1 + 8k$, donc $3^{2^p+1} = 3 + 8(3k)$. Comme $3k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $3^{2^p+1} \equiv 3 \pmod{8}$.

EXERCICE 6

$$12x - 19y = 2 \quad (1)$$

On cherche $19 \wedge 12$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$19 = 12 \times 1 + 7$$

$$12 = 7 \times 1 + 5$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Ainsi, $19 \wedge 12 = 1$.

Comme 1 divise 2, alors l'équation (1) admet au moins une solution.

On « remonte » l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière de (1).

$$1 = 5 - 2 \times 2 \Leftrightarrow 1 = 5 - (7 - 5) \times 2 \Leftrightarrow 1 = 5 \times 3 - 7 \times 2 \Leftrightarrow 1 = (12 - 7) \times 3 - 7 \times 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 12 \times 3 - 7 \times 5 \Leftrightarrow 1 = 12 \times 3 - (19 - 12) \times 5 \Leftrightarrow 1 = 12 \times 8 - 19 \times 5$$

$$\Leftrightarrow 2 = 12 \times 16 - 19 \times 10$$

Donc, (16, 10) est une solution de (1).

$$12 \times 16 - 19 \times 10 = 2 \text{ et } 12x - 19y = 2$$

On fait la différence des deux équations et on obtient :

$$12 \times 16 - 19 \times 10 - 12x + 19y = 2 - 2 \Leftrightarrow 12(16 - x) + 19(-10 + y) = 0 \Leftrightarrow 12(16 - x) =$$

$$19(10 - y)$$

Donc, 12 divise $19(10 - y)$. Mais $19 \wedge 12 = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 12 divise

$10 - y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $10 - y = 12k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y = 10 - 12k.$$

$$\text{D'où, } 12(16 - x) = 19(10 - y) \Leftrightarrow 12(16 - x) = 19 \times 12k \Leftrightarrow 16 - x = 19k \Leftrightarrow$$

$$x = 16 - 19k.$$

L'ensemble des solutions de $12x - 19y = 2$ est $S = \{(16 - 19k, 10 - 12k), k \in \mathbb{Z}\}$.