



# Classe préparatoire 1<sup>ère</sup> année

## Devoir surveillé n°1

Matière : <b>Algèbre</b>	Date :
Calculatrice : <b>Non autorisée</b>	Durée de l'examen : <b>1 heure 30</b>
<b>Téléphone portable et documents interdits</b>	Nombre de pages du sujet : <b>2</b>

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.  
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.**

### Exercice 1

1) Soient les quatre propositions suivantes

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$$

$$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$$

$$P_3 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$$

$$P_4 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$$

Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

2) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est injective si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

a) Ecrire que  $f$  n'est pas injective.

b) En déduire que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x)=f(y) \Rightarrow x=y.$$

### Exercice 2

Soit  $A, B, C, D$  quatre sous-ensembles de  $E$ .

1) Montrer que :

$$A \subset B \text{ et } C \subset D \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D) \text{ et } (A \cup C) \subset (B \cup D)$$

2) Montrer que :

$$A \subset (B \cap C) \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } A \subset C$$

3) Montrer que :

$$(B \cup C) \subset A \Leftrightarrow B \subset A \text{ et } C \subset A$$

### Exercice 3

- 1) Soient les ensembles suivants

$$E=\{1,2\} \text{ et } F=\{a,b,c\}$$

Ecrire tous les éléments de  $E \times F$ .

- 2) Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow (A \times F) \subset (B \times F)$$

- 3) Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On note  $\varphi_{A \times B}$  la fonction caractéristique du produit cartésien  $A \times B$ .

- a) Compléter la définition suivante.

$$\varphi_{A \times B} : ? \mapsto \{0,1\}$$

$$\varphi_{A \times B}(??) = 1 \text{ si } ???$$

$$\varphi_{A \times B}(??) = 0 \text{ sinon}$$

- b) Exprimer  $\varphi_{A \times B}(??)$  en fonction de  $\varphi_A(\cdot)$  et  $\varphi_B(\cdot)$

## Correction DS1 Algèbre

### Exercice 1 (7 points)

1)

$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$  : FAUX par exemple  $x=0$  et  $y=-1$  et  $x+y=-1 < 0$

$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$  : VRAI. Il suffit de choisir  $y > -x$

$P_3 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$  : FAUX. Il faudrait trouver un  $x$  tel que  $x > -y$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , ce qui est impossible.

$P_4 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$  : VRAI. Il suffit de prendre  $x=0$ .

2)

a)  $f$  n'est pas injective :  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y$  et  $f(x)=f(y)$ .

b) Soit la proposition

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$$

et soit sa négation

$$\bar{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x)=f(y) \text{ et } x \neq y$$

On remarque que :  $f$  n'est pas injective  $\Leftrightarrow \bar{P}$

D'où :  $f$  injective  $\Leftrightarrow P$

### Exercice 2 (8 points)

1) Supposons que si  $A \subset B$  et  $C \subset D$ .

- Montrons que  $(A \cap C) \subset (B \cap D)$ .

Soit  $x \in A \cap C$  alors  $x \in A$  et  $x \in C$ , d'où  $x \in B$  car  $A \subset B$  et  $x \in D$  car  $C \subset D$ , donc  $x \in B \cap D$ .

D'où  $(A \cap C) \subset (B \cap D)$ .

- Montrons que  $(A \cup C) \subset (B \cup D)$ .

Soit  $x \in A \cup C$  alors  $x \in A$  ou  $x \in C$ .

- Si  $x \in A$ , alors  $x \in B$  car  $A \subset B$ , donc  $x \in B \cup D$ .
- Si  $x \in C$ , alors  $x \in D$  car  $C \subset D$ , donc  $x \in B \cup D$ .

Dans les deux cas  $x \in B \cup D$  donc  $(A \cup C) \subset (B \cup D)$ .

2)

- Supposons que  $A \subset (B \cap C)$ . Alors pour tout  $x \in A$ , on a  $x \in B \cap C$ , donc  $x \in B$  et  $x \in C$ . D'où  $A \subset B$  et  $A \subset C$ .
- Supposons que  $A \subset B$  et  $A \subset C$ . Soit  $x \in A$ , alors  $x \in B$  car  $A \subset B$  et  $x \in C$  car  $A \subset C$ . Donc  $x \in B \cap C$ .

Conclusion :  $A \subset (B \cap C) \Leftrightarrow A \subset B$  et  $A \subset C$ .

$$\begin{aligned} 3) \quad (B \cup C) \subset A &\Leftrightarrow \bar{A} \subset \overline{(B \cup C)} \Leftrightarrow \bar{A} \subset (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &\Leftrightarrow \bar{A} \subset \bar{B} \text{ et } \bar{A} \subset \bar{C} \text{ d'après question 2)} \\ &\Leftrightarrow B \subset A \text{ et } C \subset A \end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points)

1)  $E \times F = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

2) Supposons que  $A \subset B$ . Soit  $(x,y) \in A \times F$ , alors  $x \in A$  et  $y \in F$  donc  $x \in B$  et  $y \in F$  car  $A \subset B$ . Donc  $(x,y) \in B \times F$ .

3) a)

$$\begin{aligned} \varphi_{A \times B} : E^2 &\mapsto \{0,1\} \\ \varphi_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 \text{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B \\ \varphi_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

b) Montrons que :  $\forall (x,y) \in E^2, \varphi_{A \times B}(x,y) = \varphi_A(x) \times \varphi_B(y)$

- Si  $(x,y) \in A \times B$ , alors,
  - $\varphi_{A \times B}(x,y) = 1$
  - et  $x \in A$  et  $y \in B$ , d'où  $\varphi_A(x) = 1$  et  $\varphi_B(y) = 1$ , d'où  $\varphi_A(x) \times \varphi_B(y) = 1$Donc  $\varphi_{A \times B}(x,y) = \varphi_A(x) \times \varphi_B(y)$ .
- Si  $(x,y) \notin A \times B$ , alors,
  - $\varphi_{A \times B}(x,y) = 0$
  - et  $x \notin A$  ou  $y \notin B$ , d'où  $\varphi_A(x) = 0$  ou  $\varphi_B(y) = 0$ , d'où  $\varphi_A(x) \times \varphi_B(y) = 0$Donc  $\varphi_{A \times B}(x,y) = \varphi_A(x) \times \varphi_B(y)$ .