EISTI CERGY - PAU	**Classe préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé n°2**

Matière : **Algèbre**	Date : **19/10/2012**
Enseignant : **A. Jourdan**	Durée de l'examen : **1 heure 30**
Téléphone portable, calculatrice et document interdits	Nombre de pages du sujet : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.
Le barème est donné à titre indicatif

Question de cours *(5 points)*

Soit f une application de E dans F.

1) Soient A' et B' deux sous-ensembles de F. Montrer que :
$$A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B').$$

2) Soient A et B deux sous-ensembles de E. Supposons que f est bijective. Montrer que
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Exercice 1 *(7 points)*

On dit qu'une relation binaire sur un ensemble E est une relation de préordre si elle est réflexive et transitive. Soit # une telle relation. On considère la relation binaire $\Re$ sur E définie par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \Re y \Leftrightarrow x \# y \text{ et } y \# x \qquad (*)$$

1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2) Appliquons ce résultat au cas particulier suivant. Posons $E=\mathbb{R}^2$ et définissons la relation # par
$$\forall (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2,\quad (x_1,y_1)\#(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2.$$
   i) Montrer la relation # est une relation de préordre (réflexive et transitive).
   ii) Montrer que dans ce cas, la relation d'équivalence $\Re$ définie entre deux couples par (*), revient à supposer que leurs premières composantes sont égales.
   iii) Déterminer graphiquement la classe d'équivalence associée à (0,0)

Exercice 2 *(8 points)*

Soit E un ensemble non vide et fini tel que card(E)=n. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre « inclusion » et $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre usuelle ≤.

Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}$$
$$A \mapsto \varphi(A)=\mathrm{card}(A)$$

1) Ecrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :

   P_1 : « φ est une application croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$».

   Est-ce vrai ? Si oui, démontrer le. Sinon écrire la négation de P_3 et donner un contre-exemple.

2) Ecrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :

   P_2 : « φ est une application injective de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$».

   Est-ce vrai ? Si oui, démontrer le. Sinon écrire la négation de P_2 et donner un contre-exemple.

3) Ecrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :

   P_3 : « φ est une application surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$».

   Est-ce vrai ? Si oui, démontrer le. Sinon écrire la négation de P_3 et donner un contre-exemple.

Correction DS2 Algèbre

Exercice 1

1)

Réflexive : Soit $x\in E$, alors $x\#x$ car # est réfléxive, donc $x\mathcal{R}x$. D'où $\mathcal{R}$ est réflexive.

Symétrique : Soit $(x,y)\in E^2$ tel que $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\#y$ et $y\#x \Rightarrow y\#x$ et $x\#y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Transitive : Soit $(x,y,z)\in E^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow (x\#y$ et $y\#x)$ et $(y\#z$ et $z\#y) \Rightarrow (x\#y$ et $y\#z)$ et $(z\#y$ et $y\#x) \Rightarrow x\#z$ et $z\#x$ car # est transitive $\Rightarrow x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2)

i)

Réflexive : Soit $(x_1,y_1)\in E$. Alors $x_1\leq x_1 \Rightarrow (x_1,y_1)\#(x_1,y_1) \Rightarrow$ # est réflexive

Transitive : Soient $(x_1,y_1)\in E$, $(x_2,y_2)\in E$, $(x_3,y_3)\in E$ tels que $(x_1,y_1)\#(x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2)\#(x_3,y_3) \Rightarrow x_1\leq x_2$ et $x_2\leq x_3 \Rightarrow x_1\leq x_3 \Rightarrow (x_1,y_1)\#(x_3,y_3)$. Donc # est transitive.

est donc une relation de préordre

ii) La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est alors définie par

$\forall(x_1,y_1)\in E$, $\forall(x_2,y_2)\in E$, $(x_1,y_1)\mathcal{R}(x_2,y_2)$

$\Leftrightarrow (x_1,y_1)\#(x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2)\#(x_1,y_1)$

$\Leftrightarrow x_1\leq x_2$ et $x_2\leq x_1$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

iii) $(x,y)\in \mathcal{R}(0,0) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(0,0) \Rightarrow x=0$. Donc $\mathcal{R}(0,0)$ est l'axe des ordonnées.

Exercice 2

1)

P_1 : $\forall A\in \mathcal{P}(E)$, $\forall B\in \mathcal{P}(E)$, $A\subset B \Rightarrow \varphi(A)\leq\varphi(B)$.

Soient $A\in \mathcal{P}(E)$ et $B\in \mathcal{P}(E)$ tels que $A\subset B$

$\Rightarrow$ card(A)≤card(B) (prop. du cours)

$\Rightarrow \varphi(A)\leq\varphi(B)$.

D'où φ est croissante.

2)

P_2 : $\forall A\in \mathcal{P}(E)$, $\forall B\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A)=\varphi(B) \Rightarrow A=B$

Soient $A\in \mathcal{P}(E)$ et $B\in \mathcal{P}(E)$ tels que $\varphi(A)=\varphi(B) \Leftrightarrow$ card(A)=card(B). Or ceci n'entraine pas que A=B.

Non P_2 : $\exists A\in \mathcal{P}(E)$, $\exists B\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A)=\varphi(B)$ et $A\neq B$

Prenons le contre-exemple E={1,2,3}, A={1,2} et B={2,3}. On a card(A)=card(B) et A≠B. Donc φ n'est pas injective

3)

P_3 : $\forall p\in \mathbb{N}$, $\exists A\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A)=p$

Non P_3 : $\exists p\in \mathbb{N}$, $\forall A\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A)\neq p$

On a pour tout $A\in \mathcal{P}(E)$, card(A)≤n. Donc si on choisit n>card E, on ne peut pas trouver un antécédent $A\in \mathcal{P}(E)$ tel que φ(A)=card(A)=p.