



Classe préparatoire 1^{ère} année

Devoir surveillé n°3

Matière : Algèbre	Date : 19/11/2012
Calculatrice : Non autorisée	Durée de l'examen : 1 heure
Téléphone portable et documents interdits	Nombre de pages du sujet : 1

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.**

Exercice 1

Sur l'ensemble \mathbb{R}^2 , on définit la loi \oplus par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y'+2xx'),$$

avec l'addition et la multiplication usuelles sur \mathbb{R} .

1) Montrer que (\mathbb{R}^2, \oplus) est un groupe abélien.

2) Montrer que l'ensemble

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$$

est un sous-groupe de (\mathbb{R}^2, \oplus) .

3) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow P \\ (x,y) &\mapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est un morphisme de groupes.

b) Déterminer le noyau de f . L'application f est-elle un isomorphisme de groupes.

Exercice 2

Soient $(G, *)$ et $(G', \#)$ deux groupes d'éléments neutre respectifs e et e' , $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes et A un sous-groupe de G .

1) Montrer que $f(A)$ est un sous-groupe de G' .

2) Montrer que $f^{-1}(f(A))$ est un sous-groupe de G .

N.B. On note que f n'est pas bijective donc l'application f^{-1} n'existe pas. Il est donc impossible d'écrire $f^{-1}(y)$, $y \in G'$.

Correction DS3 Algèbre

Exercice 1

1) • Associativité de \oplus . Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} [(x,y) \oplus (x',y')] \oplus (x'',y'') &= (x+x', y+y'+2xx') \oplus (x'',y'') = (x+x'+x'', y+y'+2xx'+y''+2(x+x')x'') \\ &= (x+x'+x'', y+y'+y''+2xx'+2xx''+2x'x'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y) \oplus [(x',y') \oplus (x'',y'')] &= (x,y) \oplus (x'+x'', y'+y''+2x'x'') = (x+x'+x'', y+y'+y''+2x'x''+2x(x'+x'')) \\ &= (x+x'+x'', y+y'+y''+2xx'+2xx''+2x'x'') \end{aligned}$$

d'où $[(x,y) \oplus (x',y')] \oplus (x'',y'') = (x,y) \oplus [(x',y') \oplus (x'',y'')]$. Donc \oplus est associative.

• Commutativité de \oplus . Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y'+2xx') = (x'+x, y'+y+2x'x) = (x',y') \oplus (x,y). \text{ Donc } \oplus \text{ est commutative.}$$

• Élément neutre de \oplus . On cherche $(e,e') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(e,e') \oplus (x,y) = (x,y) \oplus (e,e') = (x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $(x,y) \oplus (e,e') = (x,y) \Leftrightarrow (x+e, y+e'+2xe) = (x,y) \Leftrightarrow x+e=x$ et $y+e'+2xe=y \Rightarrow e=0$ et $e'=0$. Etant donné que \oplus est commutative, on peut dire que $(0,0)$ est l'élément neutre de \oplus .

• Symétrique. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) \oplus (x',y') = (x',y') \oplus (x,y) = (0,0)$. Or $(x,y) \oplus (x',y') = (0,0) \Leftrightarrow x+x'=0$ et $y+y'+2xx'=0 \Leftrightarrow x'=-x$ et $y'=-y+2x^2$. Etant donné que \oplus est commutative, on peut dire que $(-x, -y+2x^2)$ est le symétrique de (x,y) .

Donc (\mathbb{R}^2, \oplus) est une groupe abélien.

2) • L'élément neutre $(0,0) \in P$ car $0^2=0$.

• Soient $(x,y) \in P$ et $(x',y') \in P$, alors $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y'+2xx')$. Or $(x+x')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 = y + 2xx' + y'$ car $(x,y) \in P$ et $(x',y') \in P$. Donc $(x,y) \oplus (x',y') \in P$. P est stable par \oplus .

• Soient $(x,y) \in P$ et $(-x, -y+2x^2)$ son symétrique dans (\mathbb{R}^2, \oplus) , alors

$$(-x, -y+2x^2) \oplus (x,y) = (-x+x, -y+2y) = (-x, y) = (-x, (-x)^2) \text{ car } (x,y) \in P.$$

Donc $(-x, -y+2x^2) \in P$. P est stable par passage au symétrique.

P est donc un sous-groupe de (\mathbb{R}^2, \oplus) .

3) a) Morphisme : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f((x,y) \oplus (x',y')) = f(x+x', y+y'+2xx') = (x+x', (x+x')^2) = (x+x'+x^2+2xx'+x'^2)$$

$$f((x,y)) \oplus f((x',y')) = (x, x^2) \oplus (x', x'^2) = (x+x', x^2+x'^2+2xx')$$

d'où $f((x,y) \oplus (x',y')) = f((x,y)) \oplus f((x',y'))$. Donc f est un morphisme de groupes.

b) $\text{Ker}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (0,0)\}$. Or $f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x, x^2) = (0,0) \Leftrightarrow x=0$. Donc $\text{Ker}f = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0)\}$ donc f n'est pas injective.

Exercice 2

1) Cf cours

2) Notons que $x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$

(Attention, cela ne signifie pas que $x \in A$ mais $\Leftrightarrow \exists x' \in A, f(x)=f(x')$)

- Montrons que $e \in f^{-1}(f(A))$. f est un morphisme de groupe, donc $f(e)=e'$ or $e' \in f(A)$ car $f(A)$ est un sous-groupe de G' (cf. cours), d'où $f(e) \in f(A) \Leftrightarrow e \in f^{-1}(f(A))$.
- Soient $x \in f^{-1}(f(A))$ et $y \in f^{-1}(f(A))$, alors on doit montrer que $x*y \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x*y) \in f(A)$. On a $f(x*y)=f(x)\#f(y)$ car f est un morphisme, or $f(x) \in f(A)$ car $x \in f^{-1}(f(A))$ et $f(y) \in f(A)$ car $y \in f^{-1}(f(A))$ et de plus $f(A)$ est un sous-groupe de $(G',\#)$ (cf. cours) donc par stabilité du sous-groupe, on a $f(x)\#f(y) \in f(A) \Leftrightarrow f(x*y) \in f(A) \Leftrightarrow x*y \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f^{-1}(f(A))$ est stable par $*$.
- Soient $x \in f^{-1}(f(A))$ et x' son symétrique dans $(G,*)$. Montrons que $x' \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x') \in f(A)$. On a $f(x')=(f(x))'$ car f morphisme. Or $f(x) \in f(A)$ car $x \in f^{-1}(f(A))$ d'où $(f(x))^{-1} \in f(A)$ car $f(A)$ est un sous-groupe de G' (cf. cours), donc est stable par passage au symétrique. Donc $f(x')=(f(x))' \in f(A) \Leftrightarrow x' \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f^{-1}(f(A))$ est stable par passage au symétrique.

Conclusion : $f^{-1}(f(A))$ est un sous-groupe de $(G,*)$.