Classe préparatoire 1ère année
Devoir surveillé n°4

Matière : **Algèbre**	Date : 30/11/2012
Calculatrice : **Non autorisée**	Durée de l'examen : **2 heures**
Téléphone portable et documents interdits	Nombre de pages du sujet : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

Exercice

Pour chaque relation ci-dessous déterminer le groupe de départ, le groupe d'arrivée et la fonction de façon à avoir un morphisme de groupes. Déterminer ensuite le noyau de chacun de morphisme et en déduire si elle est injective.

Exemple : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ exp(x+y)=exp(x)exp(y)$

L'application définie par

$$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, .)$$
$$x \mapsto exp(x)$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{R}_+^*, .)$

$x\in Kerf \Leftrightarrow \ldots$

1) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
2) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, (xy)^{2n}=(x^{2n})(y^{2n})$ où n entier naturel

Problème

Soient (G,*) un groupe et H un sous-groupe de G. Notons e l'élément neutre de * et x' le symétrique de x dans (G,*).

On dit que H est un sous-groupe *normal* si et seulement si

$$\forall h\in H,\ (x*h*x')\in H,\ \forall x\in G$$

1) Montrer que si le groupe (G,*) est commutatif alors tout sous-groupe H de (G,*) est normal.
2) Montrer que le sous-groupe {e} de (G,*) est normal.
3) On rappelle que $(S(\mathbb{R}), \circ)$, l'ensemble des applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la composition de fonctions, est un groupe d'élément neutre l'application identité I_d, et tel que le symétrique d'une application $f\in S(\mathbb{R})$ est son application réciproque f^{-1}.

Soit N l'ensemble des applications de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x+b$$

avec b réel. Montrer que N est un sous-groupe normal de $(S(\mathbb{R}), \circ)$. Attention erreur car pas normal !!! Pour avoir normal, il faut restreindre $\mathbb{S}(R)$ à l'ensemble des applications affines.

4) Soient $(G_1,*)$ et $(G_2,\#)$ deux groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2. Soit f un morphisme de G_1 dans G_2.

   a) Supposons que H_2 est un sous-groupe normal de $(G_2,\#)$.

      (i) Ecrire la définition « H_2 est un sous-groupe normal de $(G_2,\#)$ »

      (ii) Montrer alors que le sous-groupe $f^{-1}(H_2)$ est normal. Veiller à bien écrire vos hypothèses et votre objectif.

   b) Supposons que f est surjective et que H_1 est un sous-groupe normal de $(G_1,*)$.

      (i) Ecrire la définition « H_1 est un sous-groupe normal de $(G_1,*)$ ».

      (ii) Ecrire la définition de « f est surjective ».

      (iii) Montrer alors que le sous-groupe $f(H_1)$ est normal. Veiller à bien écrire vos hypothèses et votre objectif.

N.B. dans les questions 4.a et 4.b, il est inutile de redémontrer que $f^{-1}(H_2)$, $f(H_1)$ sont des sous-groupes.

5) Nous avons vu que l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de l'opération

$$\forall (x_1,x_2) \in G_1 \times G_2 \text{ , } \forall (y_1,y_2) \in G_1 \times G_2 \text{ , } \quad (x_1,x_2) \times (y_1,y_2) = (x_1 * y_1 \text{ , } x_2 \# y_2)$$

   est un groupe (groupe produit) d élément neutre (e_1,e_2) et tel que le symétrique de (x_1,x_2) est (x_1',x_2').

   Montrer que $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe normal.

6) On définit l'application suivante

$$f : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$$
$$(x_1,x_2) \mapsto x_1$$

   a) Montrer que f est un morphisme du groupe $(G_1 \times G_2, \times)$ dans le groupe $(G_1,*)$.

   b) Déterminer Kerf le noyau de f.

   c) Montrer que Imf = G_1.

   d) L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Correction DS4 Algèbre

Exercice

1) L'application définie par

$$f : (\mathbb{R}_+^{*}, .) \to (\mathbb{R}, +)$$
$$x \mapsto \ln(x)$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^{*}, .)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$

$$x\in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x) =0 \Leftrightarrow x=1.$$

Kerf={1} donc f est injective. (Rq passer de ln(x)=0 à x=1 suppose déjà que f est bijective)

2) L'application définie par

$$f : (\mathbb{R}^{*}, .) \to (\mathbb{R}^{*}, .)$$
$$x \mapsto x^{2n}$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^{*}, .)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{*}, .)$

$$x\in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x^{2n} =1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1.$$

Kerf={-1,1}≠{1} donc f n'est pas injective.

Problème

1) Soit H un sous-groupe de (G,*). Soient $h\in H$ et $x\in G$, alors

x*h*x'=x*x'*h car * est commutative
=e*h car x' symétrique de x
=h car e élément neutre de *

Donc $(x*h*x')=h\in H$

Donc H est un sous-groupe normal.

2) $\forall x\in G$,

x*e*x'=x*x' car élément neutre de *
=e car x' symétrique de x

Donc $x*e*x'=e\in \{e\}$. Donc {e} est un sous-groupe normal.

3) * <u>Elément neutre de $\circ$</u>

L'application identité est bien de la forme des applications de N avec b=0.

* <u>Stabilité de N par $\circ$</u>

Soient $f\in N$ et $g\in N$ telles que $f : x \mapsto x+b$ et $g : x \mapsto x+a$. Alors

$$\forall x\in \mathbb{R},\ f\circ g(x)=f[g(x)]=f[x+a]=x+(a+b)=x+b' \text{ où } b'=a+b$$

Donc $f\circ g\in N$

Rq. Sur N, la composition de fonctions est commutative

* <u>Stabilité de N par passage au symétrique</u>

Soit $f\in N$ telle que $f : x \mapsto x+b$. Alors $f^{-1} : x \mapsto x-b$ car

$$\forall x\in R,\ f\circ f^{-1}(x)=f[x-b]=x-b+b=x=I_d(x)=f^{-1}\circ f(x).$$

$\forall x\in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=x+b'$ où $b'=(-b)$

donc $f^{-1}\in N$.

Conclusion N est un sous-groupe

4) a)

(i) H_2 est un sous-groupe normal $\Leftrightarrow \forall h_2\in H_2, \forall y\in G_2, y\#h_2\#y'\in H_2$

(ii) Soient $h_1\in f^{-1}(H_2)$ et $x\in G_1$. Il faut montrer que : $x*h_1*x'\in f^{-1}(H_2) \Leftrightarrow f(x*h_1*x')\in H_2$?

$f(x*h_1*x')=f(x)\#f(h_1)\#f(x')$ car f morphisme
$=f(x)\#f(h_1)\#f(x)'$ car f morphisme
$=y\#f(h_1)\#y'$ où $y=f(x)$

Or $h_1 \in f^{-1}(H_2) \Rightarrow f(h_1) \in H_2$. Ainsi d'après (i), on peut conclure que

$$f(x*h_1*x')=y\#f(h_1)\#y' \in H_2$$

D'où $x*h_1*x' \in f^{-1}(H_2)$

b)

(i) H_1 est un sous-groupe normal $\Leftrightarrow \forall h_1 \in H_1, \forall x \in G_1, x*h_1*x' \in H_1$

(ii) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in G_2, \exists x \in G_1, y=f(x)$

(iii) Soient $h_2 \in f(H_1)$ et $y \in G_2$. Il faut montrer que : $y\#h_2\#y' \in f(H_1) \Leftrightarrow \exists h \in H_1, y\#h_2\#y'=f(h)$?

On a

$H_2 \in f(H_1) \Rightarrow \exists h_1 \in H_1, h_2=f(h_1)$

$y \in G_2$ et f surjective $\Rightarrow \exists x \in G_1, y=f(x)$

D'où

$y\#h_2\#y'=f(x)\#f(h_1)\#f(x)'$

$=f(x)\#f(h_1)\#f(x')$ car f morphisme

$=f(x*h_1*x')$ car f morphisme

Or $h_1 \in H_1$ et H_1 sous-groupe normal donc $x*h_1*x' \in H_1$. Donc $\exists h= x*h_1*x' \in H_1$, $y\#h_2\#y'=f(h)$. Donc $y\#h_2\#y' \in f(H_1)$.

5) <u>Elément neutre</u>

$e_1 \in H_1$ car H_1 est un sous-groupe de $(G_1,*)$ et $e_2 \in H_2$ car H_2 est un sous-groupe de $(G_2,\#)$. Donc $(e_1,e_2) \in H_1 \times H_2$.

<u>Stabilité de $H_1 \times H_2$ par ×</u>

Soient $(x_1,x_2) \in H_1 \times H_2$ et $(y_1,y_2) \in H_1 \times H_2$. Alors

$x_1 \in H_1$ et $y_1 \in H_1 \Rightarrow x_1*y_1 \in H_1$ car H_1 est un sous-groupe de $(G_1,*)$

$x_2 \in H_2$ et $y_2 \in H_2 \Rightarrow x_2\#y_2 \in H_2$ car H_2 est un sous-groupe de $(G_2,\#)$

Donc $(x_1*y_1, x_2\#y_2) \in H_1 \times H_2$

<u>Stabilité par passage au symétrique de $H_1 \times H_2$</u>

Soit $(x_1,x_2) \in H_1 \times H_2$. Notons (x_1',x_2') son symétrique

$x_1 \in H_1 \Rightarrow x_1'\ H_1$ car H_1 est un sous-groupe de $(G_1,*)$

$x_2 \in H_2 \Rightarrow x_2' \in H_2$ car H_2 est un sous-groupe de $(G_2,\#)$

Donc $(x_1',x_2') \in H_1 \times H_2$.

<u>Sous-groupe normal</u>

Soient $(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2$ et $(x_1,x_2) \in G_1 \times G_2$.

$h_1 \in H_1$, $x_1 \in G_1$ et H_1 sous-groupe normal $\Rightarrow x_1*h_1*x_1' \in H_1$

$h_2 \in H_2$, $x_2 \in G_2$ et H_2 sous-groupe normal $\Rightarrow x_2\#h_2\#x_2' \in H_2$

Donc $(x_1,x_2)\times(h_1,h_2)\times(x_1',x_2')=(x_1*h_1*x_1', x_2\#h_2\#x_2') \in H_1 \times H_2$.

6) a) $\forall (x_1,x_2) \in G_1 \times G_2$, $\forall (y_1,y_2) \in G_1 \times G_2$,

$f[(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)]=f(x_1*y_1, x_2\#y_2)$ par définition de l'opération ×

$=x_1*y_1$ par définition de f

$f(x_1,x_2)*f(y_1,y_2)=x_1*y_1$ par définition de f

$= f[(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)]$

Donc f est un morphisme

b) $(x_1,x_2) \in \mathrm{Kerf} \Leftrightarrow f(x_1,x_2)=e_1$ car e_1 est l'élément neutre de G_1 groupe d'arrivée de f

$\Leftrightarrow x_1=e_1$ par définition de f

D'où $\mathrm{kerf}=\{(e_1,x_2), x_2 \in G_2\} \neq \{(e_1,e_2)\}$ donc f n'est pas injective

c) On sait que $\mathrm{Imf} \subset G_1$ car G_1 groupe d'arrivée de f. Montrons que $G_1 \subset \mathrm{Imf}$.

Soit $x \in G_1$. Il faut montrer que : $x \in \mathrm{Imf} \Leftrightarrow \exists (x_1,x_2) \in G_1 \times G_2, x=f(x_1,x_2)$. Si on résout l'équation, on a

$$x=f(x_1,x_2) \Leftrightarrow x=x_1 \text{ par définition de f}$$

En prenant par exemple $x_2=e_2$, on a trouvé $(x_1,x_2)=(x,e_2)\in G_1\times G_2$ tel que $x=f(x_1,x_2)$. Donc $x\in \mathrm{Imf}$. Donc $G_1\subset \mathrm{Imf}$ d'où $G_1=\mathrm{Imf}$ et f surjective.