



Classe préparatoire 1^{ère} année

Devoir surveillé n°5

Matière : Algèbre	Date : 21/12/2012
Calculatrice : Non autorisée	Durée de l'examen : 2 heures
Téléphone portable et documents interdits	Nombre de pages du sujet : 1

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.**

Exercice 1

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et le polynôme de $\mathbb{R}[X]$,

$$A_n = (X + 1)^n - X^n - 1$$

- 1) Développez A_n .
- 2) Déterminez la valuation et le degré de A_n ainsi que son monôme de plus haut degré.
- 3) Montrez que X divise A_n .
- 4) Déterminez les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par $(X+1)$.
- 5) Le polynôme A_n peut-il être divisible par $(X+1)^2$?
- 6) Dans le cas où A_n est divisible par $(X+1)$, déterminez le reste de la division euclidienne de A_n par $B=X(X+1)^2$.

Exercice 2

Soient les polynômes

$$P = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q = X^2 + X + 1$$

- 1) Ecrire la formule de Taylor avec le polynôme Q au point -1 .
- 2) Effectuez la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de P par Q .
- 3) Effectuez la division euclidienne de P par Q .
- 4) Vérifiez à l'aide de l'algorithme d'Euclide que P et Q sont premiers entre eux.
- 5) Trouver un couple de polynômes (U,V) tels que

$$UP + VQ = 1$$

Exercice 3

- 1) Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que

$$a^{a+b} = 1$$

- 2) Résoudre dans \mathbb{N}^3 l'équation

$$xyz + yz - xy - y - 7 = 0$$

Correction DS5 Algèbre

Exercice 1

1) D'après le formule du binôme,

$$\begin{aligned} A_n &= (X+1)^n - X^n - 1 = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k - X^n - 1 \\ &= C_n^n X^n + C_n^{n-1} X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k X^k + C_n^0 - X^n - 1 = nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k X^k \end{aligned}$$

2) D'après le développement ci-dessus,

$$\text{val}(A_n)=1, \text{d}^\circ(A_n)=n-1$$

et le monôme de plus haut degré est nX_{n-1} .

3) On a

$$A_n(0) = (0+1)^n - 0^n - 1 = 1 - 1 = 0$$

Donc il existe $P \in R[X]$ tel que $A_n = XP$, c'est-à-dire X divise A_n .

Remarque : On peut aussi mettre X en facteur dans le développement de la question 1.

4) On a

$$A_n(-1) = (-1+1)^n - (-1)^n - 1 = -[(-1)^n + 1] = \begin{cases} -2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Si n est impair, -1 est racine de A_n donc il existe $P \in R[X]$ tel que $A_n = (X+1)P$, c'est-à-dire $(X+1)$ divise A_n .

5) D'après le question 4) si n est pair, $(X+1)$ ne divise pas A_n donc $(X+1)^2$ non plus. Prenons le cas où n est impair et regardons si -1 est racine double de A_n .

$$A'_n = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1} \Rightarrow A'_n(-1) = n(-1+1)^{n-1} - n(-1)^{n-1} = -n \text{ car } (n-1) \text{ est pair}$$

Or $n \geq 2$ donc $A'_n(-1) \neq 0$. Donc -1 est racine simple uniquement.

6) Division euclidienne de A_n par B : Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que

$$A_n = BQ + R \text{ où } \text{d}^\circ(R) < \text{d}^\circ(B).$$

Ici $\text{d}^\circ(B)=3$, donc $\text{d}^\circ(R) \leq 2$, d'où $R = a_0 + a_1X + a_2X^2$.

- $A_n(0) = B(0)Q(0) + R(0) \Rightarrow R(0) = 0$ car $A_n(0) = B(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
- $A_n(-1) = B(-1)Q(-1) + R(-1) \Rightarrow R(-1) = 0$ car $A_n(-1) = B(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1$
- $A'_n = B'Q + Q'B + R' \Rightarrow A'_n(-1) = B'(-1)Q(-1) + Q'(-1)B(-1) + R'(-1)$
 $\Rightarrow R'(-1) = -n$ car $A'_n(-1) = -n$ et $B(-1) = B'(-1) = 0$
 $\Rightarrow a_1 - 2a_2 = -n$

D'où $a_1 = a_2 = n$ et ainsi

$$R = nX(1+X)$$

Exercice 2

1) D'après la formule de Taylor,

$$Q = Q(-1) + Q'(-1)(X+1) + \frac{Q''(-1)(X+1)^2}{2}$$

$$Q(-1) = 1$$

$$Q' = 2X + 1 \Rightarrow Q'(-1) = -1$$

$$Q'' = 2 \Rightarrow Q''(-1) = 2$$

D'où

$$Q = 1 - (X+1) + (X+1)^2.$$

2) Division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 : $P = (1 - X + 2X^2)Q + X^3(1 - X)$

3) Division euclidienne : $P = (X^2 + X)Q - X + 1$

4) Algorithme d'Euclide

$$Q=(X^2+X)Q+R_1 \text{ où } R_1=-X+1 \Rightarrow P \wedge Q=Q \wedge R_1$$

$$Q=(-X-2)R_1+3 \Rightarrow Q \wedge R_1=R_1 \wedge 3=1$$

5) On remonte l'algorithme d'Euclide

$$R_1=P-(X^2+X)Q$$

$$3=Q+(X+2)R_1=Q+(X+2)[P-(X^2+X)Q]=(X+2)P+[1-(X+2)(X^2+X)]Q$$

$$\Rightarrow 1=(X+2)P/3+[1-(X+2)(X^2+X)]Q/3$$

Exercice 3

1) Soit $d=a \wedge (a+b)$

$$\Rightarrow d|a \text{ et } d|(a+b)$$

$$\Rightarrow a=kd \text{ et } a+b=k'd \text{ où } (k,k') \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Rightarrow a=kd \text{ et } b=k'd-a=(k'-k)d$$

$$\Rightarrow d|a \text{ et } d|b$$

$$\Rightarrow d|(a \wedge b)$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ car } a \wedge b=1$$

2) $(x+1)y(z-1)=7$

Or 7 est un nombre premier donc $7=1 \times 1 \times 7$ ou $7=1 \times (-1) \times (-7)$ ou $7=(-1) \times (-1) \times 7$. Or $y \geq 0$ donc reste les possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x+1=1 \\ z-1=1 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(0,7,2) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ z-1=-1 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow (-2,7,0) \text{ impossible}$$

$$\text{ou} \begin{cases} x+1=7 \\ z-1=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (6,1,2) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+1=-7 \\ z-1=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (-6,1,0) \text{ impossible}$$

$$\text{ou} \begin{cases} x+1=1 \\ z-1=7 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (0,1,6) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ z-1=-7 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (-2,-6,0) \text{ impossible}$$

Finalement les solutions sont

$$(0,7,2), (6,1,2), (0,1,6)$$