Classe préparatoire 1ère année
Examen de fin de semestre

Matière : **Algèbre**	Date : 18/01/2013
Calculatrice : **Non autorisée**	Durée de l'examen : **3 heures**
Téléphone portable et documents interdits	Nombre de pages du sujet : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision de la justification.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

<u>Questions de cours</u> (barème environ 20%)

1) Donner la formule du binôme de Newton.
2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison a et de premier terme u_0. Montrer que

$$\forall n\geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

3) Donner la définition (propriété) de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
4) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire en termes de quantificateurs les propositions suivantes :
   a) f n'est pas la fonction nulle
   b) f ne s'annule jamais
   c) f est une fonction croissante
   d) f n'est pas une fonction croissante

<u>Exercice 1</u> (barème environ 30%)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux. On rappelle que $(\mathbb{R}_2[X],+,*)$ est un anneau tel que

- P_0, le polynôme constant égal à 0, est l'élément nul,
- le symétrique de tout polynôme P pour l'addition est le polynôme (-P)
- P_1, le polynôme constant égal à 1 est l'élément unité

Soit l'ensemble $E=\{P\in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0)=0\}$.

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_2[X],+)$
2) Montrer que E est un sous-anneaux de $(\mathbb{R}_2[X],+,*)$

Soit f l'application de $(E,+,*)$ dans $(\mathbb{R},+,*)$ définie par

$$f : (E,+,*) \to (\mathbb{R},+,*)$$
$$P \mapsto P(0)$$

3) Montrer que f est un morphisme d'anneaux.

4) Déterminer Ker$f$. En déduire si f est injective.
5) Donner la définition puis déterminer les ensembles suivants :

$$f^{-1}(\{1\}) \qquad\qquad f(\{P_0,P_1\})$$

Exercice 2 (barème environ 25%)
Soit la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{1}{X^2(X-1)^3}.$$

1) Donner la forme de la décomposition en éléments simple de F dans $\mathbb{R}$.
2) Montrer que X^2 et $(X-1)^3$ sont premiers entre eux.
3) Déterminer les polynômes U et V tels que

$$X^2U(X)+(X-1)^3V(X)=1.$$

4) En déduire deux polynômes A et B tels que

$$F(X)=\frac{A(X)}{X^2}+\frac{B(X)}{(X-1)^3}$$

5) A l'aide de la formule de Taylor, écrire B(X) en fonction des puissances successives de $(X-1)^k$.
6) En déduire la décomposition en éléments simples de F(X).

Exercice 3 (barème environ 25%)
Soit E un ensemble fini.

1) On définit une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A\in \mathcal{P}(E),\ \forall B\in \mathcal{P}(E),\quad A\,\mathcal{R}\,B \quad\Leftrightarrow\quad A=B \text{ ou } A=\overline{B}$$

a) Justifier que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique
b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
c) Déterminer la classe d'équivalence associée à l'ensemble vide ϕ.

2) Soit maintenant la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définit par l'inclusion.
a) Justifier que c'est une relation d'ordre.
b) Est-ce une relation d'ordre total ?
c) Donner les plus petits et plus grand éléments de $\mathcal{P}(E)$.
(supprimer les questions d et e)
d) Soit C une partie de E. Donner la définition d'un majorant et d'un minorant de C.
e) Soient A et B deux parties de E. Donner des minorants et majorants du sous-ensemble {A,B}. Y-a-t'il un minimum et/ou maximum ?

Correction examen S1 Algèbre

Questions de cours

4) a) $\exists x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$
   c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall x'\in\mathbb{R}$, $x\leq x' \Rightarrow f(x)\leq f(x')$ d) $\exists x\in\mathbb{R}$, $\exists x'\in\mathbb{R}$, $x\leq x'$ et $f(x)>f(x')$

Exercice 1

1) * $P'_0(0)=0$ donc l'élément nul $P_0\in E$
   * Soient $P\in E$ et $Q\in E$ alors $(P+Q)'(0)=P'(0)+Q'(0)=0+0=0$ donc $P+Q\in E$
   * Soit $P\in E$ alors $(-P)'(0)=-P'(0)=-0=0$ donc $(-P)\in E$

   Conclusion : $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_2[X],+)$
2) * $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_2[X],+)$
   * $P'_1=P_0$ donc $P'_1(0)=0$ d'où $P_1\in E$
   * Soient $P\in E$ et $Q\in E$ alors $(PQ)'(0)=P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0)=0*0=0$ donc $PQ\in E$

   Conclusion : $(E,+,*)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}_2[X],+,*)$
3) * Soient $P\in E$ et $Q\in E$, $f(P+Q)=(P+Q)(0)=P(0)+Q(0)=f(P)+f(Q)$
   * Soient $P\in E$ et $Q\in E$, $f(PQ)=(PQ)(0)=P(0)*Q(0)=f(P)*f(Q)$
   * $f(P_1)=P_1(0)=1$ or 1 est l'élément unité de $(\mathbb{R},+,*)$

   Conclusion : f est un morphisme d'anneaux
4) $\mathrm{Ker}f=\{P\in E,\ f(P)=0\}$. Soit $P\in E$ alors $P'(0)=0$ et si $f(P)=0$ alors $P(0)=0$ donc P est un polynôme qui n'a ni terme constant, ni terme de 1^er^ degré. Donc Ker$f$ est l'ensemble des monômes de degré 2. $\mathrm{Ker}f\neq\{P_0\}$ donc f n'est pas injective.
5) * $P\in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow P\in E$ et $f(P)\in\{1\} \Leftrightarrow P\in E$ et $f(P)=1 \Leftrightarrow P'(0)=0$ et $P(0)=1$

   Notons $P=a_0+a_1X+a_2X^2$, alors $P'=a_1+2a_2X$, d'où

   $$P'(0)=0 \text{ et } P(0)=1 \Leftrightarrow a_1=0 \text{ et } a_0+a_1+a_2=1 \Leftrightarrow a_1=0 \text{ et } a_2=1-a_0$$

   Donc $f^{-1}(\{1\})=\{a_0(1-X^2)+X^2,\ a_0\in\mathbb{R}\}$
   * $x\in f(\{P_0,P_1\}) \Leftrightarrow \exists P\in\{P_0,P_1\},\ f(P)=x \Leftrightarrow \exists P\in\{P_0,P_1\},\ P(0)=x$

   Si $P=P_0$ alors $P(0)=P_0(0)=0$ donc $x=0$

   Si $P=P_1$ alors $P(0)=P_1(0)=1$ donc $x=1$

   D'où $f(\{P_0,P_1\})=\{0,1\}$.

Exercice 2

Exercice 19

Décomposition en éléments simples de la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X^2(X-1)^3}$.

Indications

Former une égalité de Bézout pour X^2 et $(X-1)^3$ par l'algorithme d'Euclide.

Écrire un polynôme dans la base $\left((X-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution

X^2 et $(X-1)^3$ sont premiers entre eux.

On a $\quad (X-1)^3 = X^2(X-3) + 3X - 1$

et $\quad X^2 = \left(\dfrac{X}{3} + \dfrac{1}{9}\right)(3X-1) + \dfrac{1}{9} \quad$ donc

$$\begin{aligned}
1 &= 9X^2 - (3X+1)(3X-1)\\
1 &= 9X^2 - (3X+1)\left[(X-1)^3 - X^2(X-3)\right]\\
1 &= [(3X+1)(X-3)+9]X^2 - (3X+1)(X-1)^3\\
1 &= (3X^2-8X+6)X^2 - (3X+1)(X-1)^3
\end{aligned}$$

et, enfin $\quad F(X) = \dfrac{3X^2-8X+6}{(X-1)^3} - \dfrac{3X+1}{X^2}$.

Soit $P(X) = 3X^2 - 8X + 6$; $P(1) = 1$, $P'(1) = -2$, $P''(1) = 6$.

On a donc $3X^2 - 8X + 6 = 3(X-1)^2 - 2(X-1) + 1$

d'où $\dfrac{3X^2-8X+6}{(X-1)^3} = \dfrac{3}{X-1} - \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{(X-1)^3}$.

Et enfin $F(X) = \dfrac{3}{X-1} - \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{(X-1)^3} - \dfrac{3}{X} - \dfrac{1}{X^2}$.

Commentaires

$X\wedge(X-1)=1$.

Divisions successives, algorithme d'Euclide.

On remonte les calculs.

$P'(X)=6X-8$, $P''(X)=6$.

Par la formule de Taylor.

Exercice 3

1)

a) $\mathscr{R}$ antisymétrique : $\forall A\in \mathscr{P}(E)$, $\forall B\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}B$ et $B\mathscr{R}A \Rightarrow A=B$

$\mathscr{R}$ n'est pas antisymétrique : $\exists A\in \mathscr{P}(E)$, $\exists B\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}B$ et $B\mathscr{R}A$ et $A\neq B$

Si on prend $A=E\in \mathscr{P}(E)$ et $B=\varnothing\in \mathscr{P}(E)$, alors

$A\mathscr{R}B$ car $A=\overline{B}$ et $B\mathscr{R}A$ car $B=\overline{A}$ et $A\neq B$.

Donc $\mathscr{R}$ n'est pas antisymétrique.

b) Réflexive : $\forall A\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}A$ car $A=A$.

Symétrique : $\forall A\in \mathscr{P}(E)$, $\forall B\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}B \Rightarrow A=B$ ou $A=\overline{B} \Rightarrow B=A$ ou $B=\overline{A} \Rightarrow B\mathscr{R}A$

Transitive : $\forall A\in \mathscr{P}(E)$, $\forall B\in \mathscr{P}(E)$, $\forall C\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}B$ et $B\mathscr{R}C$

$\Rightarrow$ ($A=B$ ou $A=\overline{B}$) et ($B=C$ ou $B=\overline{C}$)

$\Rightarrow$ ($A=B$ et $B=C$) ou ($A=B$ et $B=\overline{C}$) ou ($A=\overline{B}$ et $B=C$) ou ($A=\overline{B}$ et $B=\overline{C}$)

$\Rightarrow A=C$ ou $A=\overline{C}$

$\Rightarrow A\mathscr{R}C$

Donc R est une relation d'équivalence

c) $A\in \mathscr{A}(\varnothing) \Rightarrow A\in \mathscr{P}(E)$, $A\mathscr{R}\varnothing \Rightarrow A\in \mathscr{P}(E)$, $A=\varnothing$ ou $A=\overline{\varnothing}=E$. Donc $\mathscr{A}(\varnothing)=\{\varnothing,E\}$.

2)

a) L'inclusion une relation d'ordre car elle est :

Réflexive car : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset A$

Antisymétrique car : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $\forall B \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$

Transitive car : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $\forall B \in \mathscr{P}(E)$, $\forall C \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

b) L'inclusion est une relation d'ordre total si: $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $\forall B \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset B$ ou $B \subset A$

L'inclusion n'est pas une relation d'ordre total si : $\exists A \in \mathscr{P}(E)$, $\exists B \in \mathscr{P}(E)$, $\overline{A \subset B}$ et $\overline{B \subset A}$.

Prenons le cas où E={1,2,3}, A={1} et B={2,3} alors $\overline{A \subset B}$ et $\overline{B \subset A}$. Donc l'inclusion n'est pas une relation d'ordre total.

c) $\varnothing$ est le minimum de $\mathscr{P}(E)$ pour la relation d'inclusion et E le maximum.

d) Soit $C \in \mathscr{P}(E)$

$C_m \in \mathscr{P}(E)$ est un minorant de C si : $\forall C' \in C$, $C_m \subset C'$

$C_M \in \mathscr{P}(E)$ est un majorant de C si : $\forall C' \in C$, $C' \subset C_M$

e) Dans cette question C={A,B}, alors C est son propre majorant et par exemple {A} est un minorant de C.