T.D. n°1

Logique, ensembles

LOGIQUE

Exercice 1

Soient P, Q, R, S quatre propositions.

1) Montrer que

a) ″ P et (Q ou R) ″ $\Leftrightarrow$ ″ (P et Q) ou (P et R) ″

b) ″ P ou (Q et R) ″ $\Leftrightarrow$ ″ (P ou Q) et (P ou R) ″

2) En déduire que

″ (P ou Q) et (R ou S) ″ $\Leftrightarrow$ ″(P et R) ou (Q et R) ou (P et S) ou (Q et S) ″

3) x et y étant deux nombres réels, résoudre le système :

$$(S)\quad \begin{cases}(x-1)(y-2)=0\\(x-2)(y-3)=0\end{cases}.$$

Exercice 2

On dit qu'une suite (u_n) de réels est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geq p \text{ et } n \geq p \Rightarrow |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Exprimer qu'une suite n'est pas de Cauchy.

Exercice 3

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = mp$$

Exercice 4

Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un individu, y un film et que p(x,y) est la proposition « L'individu x a vu le film y ».

1) $\forall x, \forall y, p(x,y)$ 2) $\exists x, \exists y, p(x,y)$ 3) $\forall x, \exists y, p(x,y)$

4) $\exists x, \forall y, p(x,y)$ 5) $\forall y, \exists x, p(x,y)$ 6) $\exists y, \forall x, p(x,y)$

Exercice 5

A partir des trois propositions P, Q et R, on définit les quatre propositions suivantes :

A : ″ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ ″ B : ″ $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ ″

C : ″ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ″ D : ″ $(\overline{P} \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ ″

1) Ecrire les négations des propositions A, B, C et D.
2) Y a-t-il parmi A, B, C et D des propositions équivalentes ?

SOMMES, PRODUITS, RECURRENCE

Exercice 6

1) Calculer

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (ii) $\prod_{k=2}^{n} (1-\frac{1}{k})$ (iii) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$

2) Montrer que

(i) $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq n$

(ii) Trouver un encadrement de $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Exercice 7

1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0. Montrer que :

(i) $\forall n\geq 0$, $u_n = u_0 + na$

(ii) $\forall n\geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$.

(iii) En déduire la somme de n premiers entiers

2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison a et de premier terme u_0. Montrer que :

(i) $\forall n\geq 0$, $u_n = u_0 a^n$

(ii) $\forall n\geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Exercice 8

Soient n un entier et $p\in\{0,\ldots,n\}$. On rappelle la formule d'une combinaison

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

1) Soit $n\in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall p\in\{1,\ldots,n-1\},\ C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad \text{(triangle de Pascal)}$$

2) Soient a et b des éléments d'un ensemble E tels que ab=ba. Montrer que :

$$\forall n>0,\ (a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

En déduire le développement de $(x+2)^4$ et $(1-x)^4$.

ENSEMBLES

Exercice 9

Soient les ensembles suivants

$E=\{a,b,c\}$ $\quad$ $F=\{b,c,d\}$ $\quad$ $G=\{*,\#\}$

1) Construire les ensembles suivants.

$E\cap F$ $\quad$ $E\cup F$ $\quad$ $E\setminus F$

$E\times G$ $\quad$ $\mathcal{P}(E)$ $\quad$ $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$

2) Les écritures suivantes sont incorrectes, expliquer pourquoi et corriger:

$A\subset E$ $\quad$ $C\in \mathcal{P}(F)$ $\quad$ $C\in E\times G$ $\quad$ $\emptyset\subset \mathcal{P}(E)$

Exercice 10

Soient A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer que

$$(A\cap B)\setminus(A\cap C)=A\cap(B\setminus C)$$

Exercice 11

1) Montrer que

$$A\cap B=A\cup B \quad\Leftrightarrow\quad A=B$$

2) Montrer que

$$(E= A\cup B \text{ et } A\cap B=\emptyset) \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A}=B$$

Exercice 12

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. La différence symétrique de A et B est le sous-ensemble noté $A\,\Delta\,B$ défini par

$$A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

1) Montrer que

$$A\,\Delta\,B = B\,\Delta\,A$$

2) Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow A\,\Delta\,B=\emptyset$$

3) Montrer que la fonction caractéristique de $A\,\Delta\,B$ vaut

$$\varphi_{A\Delta B}=\varphi_A-2\,\varphi_A\,\varphi_B+\varphi_B$$

Exercice 13

Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que

$$(E\times G)\cup(F\times G)=(E\cup F)\times G$$

Exercice 14

Soient F et G deux sous-ensembles de E.

1) Montrer que : $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2) Montrer que : $F \subset G \Leftrightarrow \overline{F} \cup G = E$

Exercice 15

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B et C deux sous-ensembles de E.

1) Calculer card($A \cup B \cup C$).
1) Montrer que $\operatorname{card} A + \operatorname{card} \overline{A} = n$.
2) On note $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Montrer que

$$\operatorname{card}(A \Delta B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - 2\operatorname{card}(A \cap B).$$

Exercice 16

Soient E et F deux ensembles finis tels que card(E) = card(F) = n. On note A et B deux sous-ensembles de E et A' et B' deux sous-ensembles de F tels que

card(A) = card(A') = a et card(B) = card(B') = b.

Déterminer $\operatorname{card}\left((A \times A') \cup (B \times \overline{A'})\right)$.