



Algèbre et Géométrie

CHAPITRE 2

Relations binaires

et

Applications

Sommaire

1. Relations binaires sur un ensemble	3
1.1. Définitions	3
1.2. Relations d'ordre	3
1.3. Relations d'équivalence	7
2. Applications.....	7
2.1. Notations usuelles	7
2.2. Image directe ou réciproque d'un sous-ensemble.....	9
2.3. Applications sur un ensemble ordonné	9
2.4. Injection, surjection et bijection.....	11
2.5. Bijections de fonctions usuelles.....	13
2.6. Définitions complémentaires	15

Références

1. <http://mp.cgedupuydelome.fr/>
2. <http://exo7.emath.fr/index.htm>
3. <http://laurentb.garcin.free.fr/>
4. Mathématiques, tome 1 : Algèbre et géométrie, MPSI de Daniel Guinin et Bernard Joppin (18 septembre 1999)

1. Relations binaires sur un ensemble

1.1. Définitions

Soient E et F deux ensembles. On s'intéresse à certaines relations pouvant relier un élément de E à un élément de F .

Une relation binaire \mathcal{R} de E vers F est un sous-ensemble de $E \times F$. Un couple $(x, y) \in E \times F$ vérifie la relation \mathcal{R} si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note alors $x \mathcal{R} y$. Une relation binaire sur E est une relation binaire de E vers E .

Exemples :

	E	\mathcal{R}	$x \mathcal{R} y$
a)	E	la différence	$x \neq y$
b)	{droites}	le parallélisme	//
c)	E	l'égalité	=
d)	\mathbb{R}	l'infériorité	\leq
e)	$\mathcal{P}(E)$	l'inclusion	\subset
f)	\mathbb{N}	La divisibilité	$n \mid p$

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E

\mathcal{R} est *réflexive* lorsque $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

\mathcal{R} est *symétrique* lorsque $\forall x \in E, \forall y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

\mathcal{R} est *antisymétrique* lorsque $\forall x \in E, \forall y \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

\mathcal{R} est *transitive* lorsque $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Une relation peut être ni symétrique, ni antisymétrique. En revanche nous n'avons pas les implications suivantes :

FAUX \mathcal{R} est *symétrique* $\Rightarrow \mathcal{R}$ n'est pas *antisymétrique*
 \mathcal{R} est *antisymétrique* $\Rightarrow \mathcal{R}$ n'est pas *symétrique*

1.2. Relations d'ordre

Une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est une *relation d'ordre* sur E si elle est :

- réflexive
- antisymétrique
- transitive

On dit alors que E est **un ensemble ordonné** pour la relation \mathcal{R} . Une relation d'ordre est souvent notée \leq quand il n'y a pas de risque de confusion avec une situation usuelle (*i.e* l'inégalité dans \mathbb{R}).

Comme son nom l'indique, une relation d'ordre sert à établir une hiérarchie parmi les éléments de E . $x \mathcal{R} y$ doit être compris comme une phrase du type x plus petit que y , ou x est avant y .

Exemple : Dans l'ensemble des mots de l'alphabet (un mot étant une suite finie de lettres de l'alphabet), l'ordre lexicographique est une relation d'ordre. Cette relation est souvent utilisée dans de nombreux langages de programmation :

'ABBC' ≤ 'ABC' est vrai 'ABBC' ≤ 'ABB' est faux.

Exemple : Soit (E, \mathcal{R}) et (F, \mathcal{R}^*) deux ensembles ordonnés. Dans $E \times F$, on définit la relation \preceq par

$$(x, y) \preceq (x', y') \text{ si et seulement si } x \mathcal{R} x' \text{ et } y \mathcal{R}^* y'.$$

Cette relation est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelée la relation produit sur $E \times F$ des relations d'ordre sur E et sur F .

Une relation binaire est appelée *relation d'ordre strict* si elle est antisymétrique, transitive et

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow x \neq y.$$

Exemple : Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. La relation définie par $(x \leq y \text{ et } x \neq y)$ est une relation d'ordre strict notée $<$.

On dit alors qu'un ensemble E muni d'une relation d'ordre \mathcal{R} est *totalelement ordonné* si tous ses éléments sont ordonnés entre eux, c'est-à-dire, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x.$$

Dans le cas contraire, on dit alors que l'ensemble E est *partiellement ordonné* pour la relation \mathcal{R} .

Exemple : Sur l'ensemble des réels, la relation usuelle $x \leq y$ est une relation d'ordre total. Alors que sur l'ensemble des parties de E , l'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre partiel sur E .

Éléments particuliers d'un ensemble ordonné (ou d'une partie)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \preceq .

- Une partie A de E est *minorée* par un *minorant* $a \in E$ si : $\forall x \in A, a \preceq x$. Si un minorant appartient à A alors on dit que c'est le *minimum* de A
- Une partie A de E est *majorée* par un *majorant* $b \in E$ si : $\forall x \in A, x \preceq b$. Si un majorant appartient à A alors on dit que c'est le maximum.

Remarque: Une partie A peut être minorée (resp. majorée) mais ne pas admettre de minimum (resp. maximum).

Exemple : $[0, 1]$ est majoré par 2 et minoré par -1 par exemple, et admet 0 comme minimum et 1 comme maximum. $]0, 1]$ n'admet pas de minimum, mais admet 1 comme maximum. $]0, 1[$ n'admet ni minimum, ni maximum.

Exemple : \emptyset est le minimum de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation d'inclusion et E le maximum.

1.3. Relations d'équivalence

Une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* sur E si elle est :

- réflexive
- symétrique
- transitive

Exemple : Sur l'ensemble \mathcal{D} des droites d'un plan, la relation $//$ est une relation d'équivalence sur \mathcal{D} .

Exemple : Soient E un ensemble et f une application de E dans \mathbb{R} . La relation binaire \mathcal{R} sur E associée à l'application f définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x)=f(y),$$

est une relation d'équivalence sur E .

Sur E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} , on appelle *classe d'équivalence* (modulo \mathcal{R}) d'un élément x de E , le sous-ensemble noté $\mathcal{R}(x)$ ou \bar{x} , constitué des éléments de E qui sont équivalents à x , c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in E, y\mathcal{R}x\}.$$

Propriété 1

- i) $x \in \mathcal{R}(x)$
- ii) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$

2. Applications

Soit \mathcal{R} une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F . On dit que \mathcal{R} est une *application* de E vers F lorsque pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in F$ et un seul tel que $(x,y) \in \mathcal{R}$. Notons f une telle relation, on a donc

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y = f(x)$. On dit que y est *l'image* de x par l'application f et que x est *l'antécédent* de y par l'application.

On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F , où E est *l'ensemble de départ* et F est *l'ensemble d'arrivée*.

2.1. Notations usuelles

Soit E un ensemble, on appelle *application identité* sur E , notée Id_E , l'application de E dans E telle que $\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$.

Soient E, F et G trois ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ des applications de E dans F et F dans G respectivement. La *composée des applications* f et g est l'application de E dans G , notée $g \circ f$, définie par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Propriété 2

Soient E, F, G, H des ensembles.

- L'application identité est l'élément neutre de la composition d'applications :

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, F), f \circ I_d = f \text{ et } I_d \circ f = f.$$

- La composition des applications est associative :

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, F), \forall g \in \mathcal{F}(F, G), \forall h \in \mathcal{F}(G, H), h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2.2. Image directe ou réciproque d'un sous-ensemble

Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application de E dans F . Soit A un sous-ensemble de E . On appelle *image de A par f* le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Soit B un sous-ensemble de F . On appelle *image réciproque de B par f* le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Remarque : $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Propriété 3

Soient A et B deux sous-ensembles de E et soient A' et B' deux sous-ensembles de F . On a :

$$\begin{array}{ll} f(f^{-1}(A')) \subset A', & A \subset f^{-1}(f(A)), \\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B), & A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B') \\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), & f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \\ f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'), & f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

2.3. Applications sur un ensemble ordonné

Soient (E, \leq) et (F, \preceq) deux ensembles ordonnés et soit f une application de E dans F .

- L'application f est *croissante* lorsque

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x').$$

- L'application f est *décroissante* lorsque

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x').$$

L'application f est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

On parle de croissance, décroissance ou monotonie stricte quand la relation d'ordre de l'espace d'arrivée F est un ordre strict. Si on note \prec la relation d'ordre, on obtient $f(x) \prec f(x')$ pour strictement croissante et $f(x) \succ f(x')$ pour strictement décroissante.

Soit A un sous-ensemble de E et soit f une application de A dans F .

- L'application f est *minorée* quand le sous-ensemble image $f(A)$ est minoré dans F .
- L'application f est *majorée* quand le sous-ensemble image $f(A)$ est majoré dans F .

2.4. Injection, surjection et bijection

Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application de E dans F . On dit que l'application f est :

- *injective* si : $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
 $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- *surjective* si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
 $\Leftrightarrow F = f(E)$
- *bijective* si f est à la fois injective et surjective.

Si f est bijective, on peut alors définir la *fonction réciproque* f^{-1} qui est l'application de F dans E qui à tout $y \in F$, associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x = f^{-1}(y)$.

Quel que soit y , l'équation $f(x) = y$ admet

- au plus une solution si f est injective,
- au moins une solution si f est surjective,
- une et une seule solution si f est bijective, donnée par $x = f^{-1}(y)$.

Remarque : Si E et F sont des ensembles finis et si f est bijective alors $\text{Card}E = \text{Card}F$.

Exemple : L'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

n'est ni injective, ni surjective. En revanche sa restriction de $E = [-1; 1]$ sur $F = [-1; 1]$ est bijective.

Propriété 4

L'application identité est bijective.

Propriété 5

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de $\mathcal{F}(E, F)$ et g une application de $\mathcal{F}(F, G)$.

- i) Si f et g sont injectives alors la composée $g \circ f$ est injective.
- ii) Si f et g sont surjectives alors la composée $g \circ f$ est surjective.
- iii) Si f et g sont bijectives alors la composée $g \circ f$ est bijective.

Exercice

Soient E, F et G des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective et si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Propriété 6

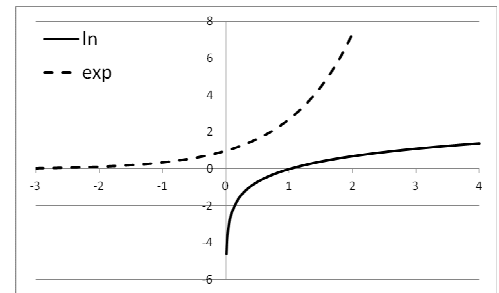
Soient E et F deux ensembles et soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. L'application f est une bijection si et seulement si il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

L'application g est alors l'application réciproque notée f^{-1} .

2.5. Bijections de fonctions usuelles

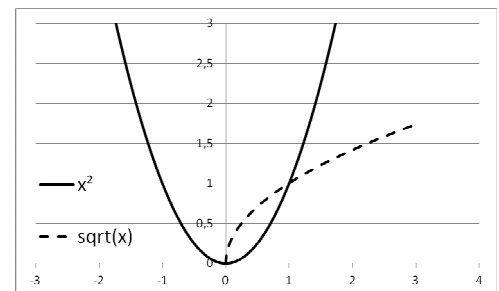
2.5.1. Fonctions logarithmique et puissances

La fonction logarithme $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle, $x \mapsto \exp(x)$.



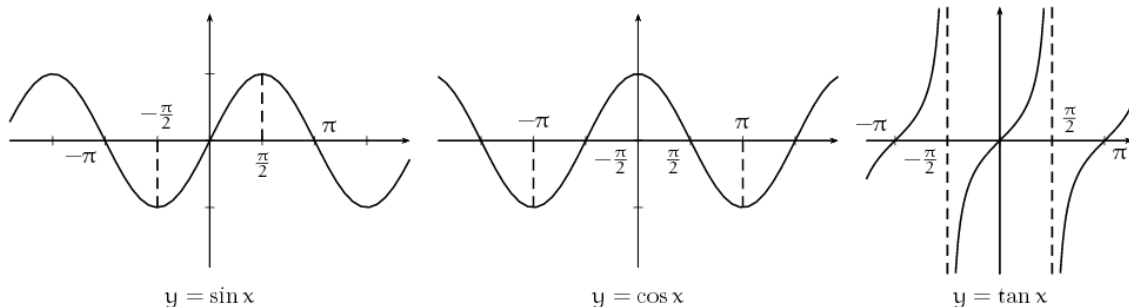
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/\alpha}$.

Dans le cas où la puissance $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la fonction est bijective sur \mathbb{R} si n est impair et sur \mathbb{R}_+ si n est pair et sa bijection réciproque s'appelle la racine $n^{\text{ième}}$ et est notée $\sqrt[n]{}$.



2.5.2. Fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente ne sont pas bijectives sur leur domaine de définition mais induisent une bijection par restriction.



- La fonction sinus induit une bijection strictement croissante de $]-\pi/2 ; \pi/2[$ sur $[-1; 1]$. On appelle fonction arcsinus sa fonction réciproque notée \arcsin . Elle est donc définie sur $[-1 ; 1]$ à valeurs dans $[-\pi/2 ; \pi/2]$ et on a

$$\forall x \in [-1 ; 1], \sin(\arcsin x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in [-\pi/2 ; \pi/2], \arcsin(\sin x) = x$$

- La fonction cosinus induit une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle fonction arccosinus sa fonction réciproque notée \arccos . Elle est donc définie sur $[-1 ; 1]$ à valeur dans $[0, \pi]$ et on a

$$\forall x \in [-1 ; 1], \cos(\arccos x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$$

- La fonction tangente induit une bijection strictement croissante de $]-\pi/2 ; \pi/2[$ sur \mathbb{R} . On appelle fonction arctangente sa fonction réciproque notée \arctan . Elle est donc définie sur \mathbb{R} à valeur dans $]-\pi/2 ; \pi/2[$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\pi/2 ; \pi/2[, \arctan(\tan x) = x$$

2.5.3. Fonctions hyperboliques

Les fonctions sinus et tangente hyperboliques sont des bijections strictement croissantes sur leur ensemble de définition.

- La bijection réciproque du sinus hyperbolique est notée argsh . Elle est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x \text{ et } \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x.$$

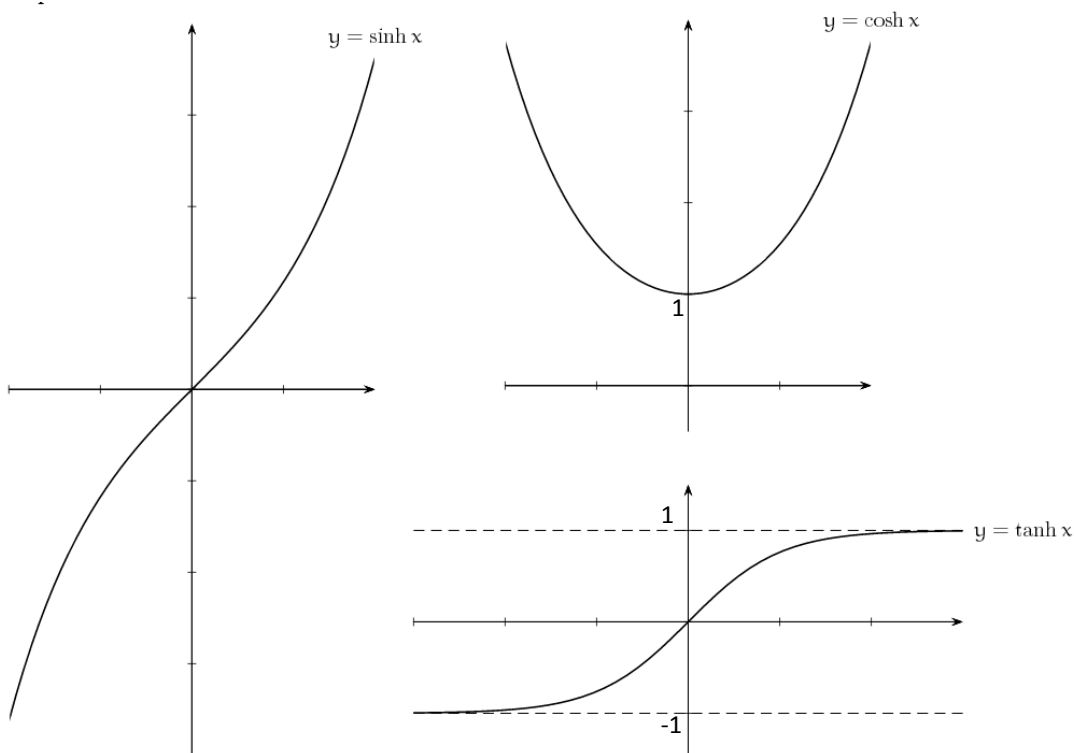
- La bijection réciproque de la tangente hyperbolique est notée argth . Elle est définie sur $] -1 ; 1[$ à valeurs dans \mathbb{R} . On a donc

$$\forall x \in] -1 ; 1[, \operatorname{th}(\operatorname{argth} x) = x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x$$

La fonction cosinus hyperbolique n'est pas bijective sur son domaine de définition mais induit une bijection sur \mathbb{R}_+ .

- La bijection réciproque du cosinus hyperbolique est notée argch . Elle est définie sur $[1, +\infty[$ à valeur dans \mathbb{R}_+ . On a donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = x.$$



2.6. Définitions complémentaires

Soient E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(E, E)$. On dit que l'application f est *involutive* (ou est une involution de E) lorsque $f \circ f = \operatorname{Id}_E$. On remarque qu'une involution de E est bijective et $f^{-1} = f$.

Soient E et F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit A un sous-ensemble de E , la *restriction* de f à A , notée $f|_A$, est l'application de A dans F telle que :

$$\forall x \in A, f|_A(x) = f(x).$$

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E . L'application i de A dans E telle que pour tout $x \in A$, $i(x) = x$, est injective et s'appelle l'*injection canonique* de A dans E . L'injection canonique de A dans E est en fait la restriction de Id_E à A .

Soient E un ensemble, $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et A un sous-ensemble de E .

- On dit que A est une *partie stable* par f lorsque $f(A) \subset A$
- On dit que A est une *partie invariante* par f lorsque $f(A) = A$.

