



T.D. n°3

Arithmétique dans \mathbb{Z}

DIVISIBILITE DANS \mathbb{Z}

Exercice 1

Montrer que la relation $a|b$ est une relation binaire réflexive et transitive. Est-elle une relation d'ordre ?

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que:

$$a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b|a$$

Exercice 3

Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers. Montrer que $(n-1) | (n^m - 1)$.

Exercice 4

1) Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que si $x \equiv y \pmod{p}$ alors $x+q \equiv y+q \pmod{p}$ et $x^q \equiv y^q \pmod{p}$

b) Montrer que si $x \equiv y \pmod{p}$ et $x' \equiv y' \pmod{p}$ alors $x+x' \equiv y+y' \pmod{p}$, $xx' \equiv yy' \pmod{p}$ et $xx' = yx' \pmod{p}$

2) Soit un entier n . Montrer que $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair. Dans le cas où n est pair donner le reste de la division.

Exercice 5

Soient n, p, q, a et b des entiers.

1) Montrer que :

$$p|a \text{ et } q|b \Rightarrow (pq) | (ab)$$

2) En déduire que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 6

On définit les trois ensembles suivants

$$E_1 = 7\mathbb{Z}$$

$$E_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est multiple de } 4\}$$

$$E_3 = \{28n, n \in \mathbb{N}\}$$

1) Etudier les inclusions possibles entre les trois ensembles.

2) Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

PGCD

Exercice 7

Déterminer le pgcd et le ppcm des nombres suivants

1) 126 et 230

2) 390, 720 et 450

3) 180, 606 et 750

Exercice 8

Déterminer tous les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360

Exercice 9

Soient a, b, c trois entiers relatifs. Montrer que si a est premier avec b et avec c alors a est premier avec bc .

Exercice 10

Exprimer les pgcd suivants à l'aide de $a \wedge b$,

$$(15a+4b) \wedge (11a+3b)$$

$$(-3a+3b) \wedge (-6a+3b)$$

Exercice 11

Etant donné $n \in \mathbb{N}$, montrer que $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux.

EQUATIONS DANS \mathbb{Z}

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{Z} les équations suivantes :

1) $91x - 65y = 156$

2) $135x - 54y = 63$

3) $72x + 35y = 13$

4) $3675x - 5145y = 4410$

Exercice 14

Résoudre dans \mathbb{N} les équations suivantes

1) $31x - 13y = 1$

2) $31x - 13y = -1$

Exercice 15

Résoudre dans \mathbb{Z}

$$\begin{cases} 7x - 19y = 1 \\ 4x + 18y = 2 \end{cases}$$

Exercice 16

Résoudre dans \mathbb{Z}

$$4x^2 - xy - 17 = 0.$$