T.D. n°4

Fonctions polynomiales
Fractions rationnelles

FONCTIONS POLYNOMIALES

Exercice 1

1) Effectuer la division euclidienne de
   a. $A=X^5-X^4+2X^3+X^2+4$ et $B=X^2-1$
   b. $A=X^2-3iX+5(1+i)$ et $B=X-1+i$
2) Effectuer la division suivants les puissances croissantes de
   a. X^4+X^3-2X+1 par X^2+X+1 à l'ordre 2.
   b. 1 par $1+iX$ à l'ordre 3

Exercice 2

1) Montrer que A est divisible par B

$$A=X^3-5X^2-4X+20 \qquad B=X^2-3X-10$$

2) Soient a, b, c et d des entiers naturels. On considère deux polynômes

$$P=X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d} \text{ et } Q=X^3+X^2+X+1$$

   a) Factoriser Q dans $\mathbb{C}$.
   b) Montrer que P est divisible par Q.

Exercice 3

On considère les polynômes

$$P_1=X^4+5X^3+5X^2-5X-6 \text{ et } P_2=X^4+2X^3-X^2-2X .$$

1) Factoriser ces polynômes en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. En déduire pgcd(P_1,P_2) et ppcm(P_1,P_2)
2) Déterminer pgcd(P_1,P_2) par l'algorithme d'Euclide

Exercice 4

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$P(0)=0,\ P(1)=0,\ P'(0)=0,\ P'(1)=2$$

2) Soit n un entier tel que $n\geq 5$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine $x_0=1$ du polynôme $P=(n-4)X^n-nX^{n-2}+nX^2-(n-4)$.

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2+X+1=0$ et montrer que les solutions vérifient $X^3=1$.
2) Montrer que pour tous p,q,r dans $\mathbb{N}$, $X^{3p}+X^{3q+1}+X^{3r+2}$ est divisible par X^2+X+1.

3) Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que X^2+X+1 divise $P(X^3)+XQ(X^3)$. Montrer que $P(1)=Q(1)=0$.

Exercice 6

A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que $A=X^4+X^3-2X+1$ et $B=X^2+X+1$ sont premiers entre eux. Déterminer alors deux polynôme U et V tels que $AU+BV=1$.

Exercice 7

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme

$$Q=\frac{1}{2}(X-a)\big(P'(X)+P'(a)\big)-P(X)+P(a).$$

1) Montrer que a est une racine de Q dont la multiplicité est supérieure ou égal à 3. Est-elle de multiplicité 3 ?
2) On suppose que $\deg(P)=3$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $Q=(X-a)^3\,U$, où U est un polynôme que l'on exprimera en fonction de P et ses dérivées.

Exercice 8

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-2$ par $B=(X-1)(X-2)$, puis par $B=(X-1)^2$, et enfin par $B=(X-1)^2(X-2)$.

Fonctions rationnelles

Exercice 9

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}$,

a) $\dfrac{X^3-X^2+X}{(1-X^2)(2X-1)}$ b) $\dfrac{X^5}{(X^2-5X+6)(X-1)^2}$ c) $\dfrac{1}{X^4-X}$

d) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ e) $\dfrac{1}{X^3(1+X^3)}$

Exercice 10

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle,

$$\frac{X^3+X^2+2}{(X+1)(X^2+1)}$$

Exercice 11

Soit la fraction rationnelle

$$F=\frac{X^5+1}{(X-2)^4}.$$

1) Donner la forme de la décomposition en éléments simple de F.
2) Décomposer X^5+1 en fonction des puissances successives de (X-2) à l'aide de la formule de Taylor.
3) En déduire la décomposition en éléments simples la fraction rationnelle.

.

Exercice 12

Soit la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{1}{X^2(X-1)^3}.$$

1) Donner la forme de la décomposition en éléments simple de F.
2) Montrer que X^2 et $(X-1)^3$ sont premiers entre eux et déterminer les polynômes U et V tels que $X^2U(X)+(X-1)^3V(X)=1$.
3) En déduire deux polynômes A et B tels que $F(X)=\frac{A(X)}{X^2}+\frac{B(X)}{(X-1)^3}$
4) Ecrire B(X) en fonction des puissances successives de $(X-1)^k$.
5) En déduire la décomposition en éléments simples de F(X).

Exercice 13

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles,

$$F_1=\frac{(X^2+1)^2}{(X-1)^6} \text{ et } F_2=\frac{X^2+1}{(X-2)^4(X+1)}$$

Exercice 14

Calculer la limite des suites :

a) $S_n=\sum_{k=3}^{n}u_k$, où $u_k=\frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)}$ b) $T_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, où $v_k=\frac{k}{1+k^2+k^4}$

Indications pour le b) $1+X^2+X^4=(1+X^2)^2-X^2$ (pour la d.e.s) $1-X+X^2=1+(X-1)+(X-1)^2$ (pour somme)

Exercice 15

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles,

a) $\frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$ b) $\frac{2X+1}{(X^2-1)^2}$ c) $\frac{1}{X(X^3-1)}$

d) $\frac{1-X+X^3}{(X-1)^3(2X-1)}$ e) $\frac{1+2X+3X^2}{(X-1)^2(X+1)^2}$ f) $\frac{1}{(X^2-1)^4(X^2+1)}$