Cycle préparatoire
Première année

2013-2014
Pau

Algèbre et Géométrie

CHAPITRE 4

Fonctions polynomiales

Polynômes, Fractions rationnelles,
Décomposition en éléments simples

Sommaire

Références

1. http://mp.cpgedupuydelome.fr/
2. http://exo7.emath.fr/index.htm
3. http://laurentb.garcin.free.fr/
4. Mathématiques, tome 1 : Algèbre et géométrie, MPSI de Daniel Guinin et Bernard Joppin (18 septembre 1999)

1. Polynômes

1.1. Définition

On appelle *polynôme* sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ dont les termes non nuls sont en nombre fini. Si pour tout $k>n$, $a_k=0$, on notera

$$P=(a_0,a_1,\dots,a_n)=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n.$$

Les éléments a_i de $\mathbb{K}$ sont appelés *coefficients* du polynôme P. On notera $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$.

L'écriture de P sous la forme d'une somme finie est unique et permet ainsi de procéder à des identifications,

$$P=Q \Leftrightarrow \sum_{k\geq 0} a_kX^k = \sum_{k\geq 0} b_kX^k \Leftrightarrow a_k=b_k,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

En particulier, on dit qu'un polynôme P est

- le *polynôme nul* si tous ses coefficients a_i sont nuls, $P=0$,
- un *polynôme constant* si tous ses coefficients a_i nuls sauf a_0, $P=a_0$,
- un *monôme* si tous ses coefficients a_i sont nuls sauf un a_k, $P=a_kX^k$.

<u>Règles de calcul</u>
Soient $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ et $Q=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m$ deux polynômes sur $\mathbb{K}$, et α un élément de $\mathbb{K}$. On définit les opérations suivantes,

- l'addition : $P+Q=a_0+b_0+(a_1+b_1)X+\dots+(a_p+b_p)X^p$, avec $p\leq\max(n,m)$
- la multiplication : $P\times Q=c_0+c_1X+\dots+c_{n+m}X^{n+m}$, avec $c_k=\sum_{i+j=k} a_ib_j$.
- la multiplication externe : $\alpha P=\alpha a_0+\alpha a_1X+\dots+\alpha a_nX^n$.

<u>Propriété 1</u>
$(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif intègre.

<u>Remarque</u> : Dans la notation $\mathbb{K}[X]$, X est appelé l'indéterminée. Le choix de la lettre X est arbitraire et on peut très bien travailler sur des polynômes d'indéterminée Y. On peut aussi définir l'anneau $\mathbb{K}[X,Y]$ des polynômes aux indéterminées X et Y, c'est-à-dire les polynômes définis comme somme des monômes $\alpha_{n,m}X^nY^m$, comme par exemple $P=1-X+X^4Y+2XY^3+Y^2$.

1.2. Degré et valuation d'un polynôme

Le *degré* de P, noté d°P est le rang du dernier terme non nul. La *valuation* de P, notée val(P) est le rang du premier terme non nul.

On appelle *polynôme normalisé* un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Par exemple le polynôme, $P=3X^2+X^3-2X^5+X^7$ est normalisé de degré 7 et de valuation 2.

Propriété 2
Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de somme et de produit non nuls, alors on a

- $d°(P)=0$ alors P polynôme constant
- $d°(P+Q)\leq\max(d°P,d°Q)$ (avec égalité si $d°P\neq d°Q$)
- $d°(P\times Q)=d°P+d°Q$
- $val(P+Q)\geq\min(val(P),val(Q))$ (avec égalité si $val(P)\neq val(Q)$)
- $val(P\times Q)=val(P)+val(Q)$

Exemple : Soient $P=X^3+X$ et $Q=-X^3+1$, alors $P+Q=X+1$, d'où $d°(P+Q)=1<3$. Par convention on note $d°(P-P)=d°(0)=-\infty$.
Soient $P=X^3+X$ et $Q=X^2-X$, alors $P+Q=X^3+X^2$, d'où $val(P+Q)=2>1$. Par convention on note $val(P-P)=val(0)=+\infty$.

1.3. Polynôme dérivé et fonction polynomiale

Soit $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle,

$$P'= a_1+2a_2X+\ldots+na_nX^{n-1},$$

le *polynôme dérivé* premier de P. On définit par récurrence, le polynôme dérivé $k^{\text{ième}}$ par

$$P^{(k)}=(P^{(k-1)})',\ \forall k\in\mathbb{N}^* \text{ et } P^{(0)}=P.$$

On a $P^{(k)}=0$ pour tout $k>n$ et $P^{(n)}=n!a_n$.

On appelle *fonction polynomiale* associée à P, l'application

$$\begin{aligned}&\mathbb{K}\to\mathbb{K}\\ &x\mapsto P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.\end{aligned}$$

Soit $\alpha\in\mathbb{K}$, on dit alors que $P(\alpha)$ est la *valeur* du polynôme P au point α.

Propriété 3 : (Formule de Taylor)
Soient $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ un polynôme sur $\mathbb{K}$ et α un élément de $\mathbb{K}$. On a

$$P=P(\alpha)+\frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n.$$

1.4. Division de polynômes

1.4.1. Division suivant les puissances décroissantes

Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B\neq 0$. Il existe un <u>unique</u> couple de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, (P,Q), tel que

$$A=BQ+R \text{ avec } \begin{cases}R=0\\ \text{ou}\\ d°R<d°B\end{cases}.$$

Q et R sont respectivement appelés *quotient* et *reste* de la *division euclidienne* de A par B. Si R=0, on dit que B *divise* A ou que A est *multiple* de B, et on note $B \mid A$. On dit que A et B sont *premiers entre eux* si A ne divise pas B et B ne divise pas A.

Exemple : La division suivant les puissances décroissantes du polynôme $A=X^5+2X^3-X^2-4X+3$ par le polynôme $B=X^2+3X+1$, donne

$$Q=X^3-3X^2+10X-28 \text{ et } R=70X+31.$$

Pgcd de polynômes et théorème de Bezout

Cette définition de la division, permet d'étendre la notion de pgcd aux polynômes et de montrer des résultats similaires à ceux obtenus dans $\mathbb{Z}$. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe un unique polynôme normalisé ou nul tel que pour tout polynôme P, on a $(P \mid A \text{ et } P \mid B) \Leftrightarrow P \mid D$. On dit que D est le *pgcd* de A et de B et on le note aussi $A \wedge B$.

De même que dans $\mathbb{Z}$, il existe un couple de polynômes (U,V) tel que AU+BV=D. Le théorème de Bezout devient alors

$$\text{A et B sont premiers entre eux } (A \wedge B=1)$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe deux polynômes U et V tels que } AU+BV=1$$

L'algorithme d'Euclide permet ici aussi de calculer le pgcd, attention toutefois à prendre le normalisé du dernier reste non nul des divisions successives. Par exemple, si $A=X^4+X^3+2X-4$ et $B=X^3-3X+2$, alors $A \wedge B=X^2+X-2$.

1.4.2. Division suivant les puissances croissantes

Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec val(B)=0 et r un entier. Il existe un unique couple de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, (P,Q) tel que

$$A=BQ+X^{r+1}R \text{ avec } \begin{cases} Q=0 \\ \text{ou} \\ d^\circ Q \le r \end{cases}.$$

Q et $X^{r+1}R$ sont respectivement appelés quotient et reste de la division puissances croissantes à l'ordre r de A par B.

Exemple : La division à l'ordre 2 suivant les puissances croissantes du polynôme $A=2+X-3X^2+X^3$ par le polynôme $B=1+4X-X^2+X^3$, donne

$$Q=2-7X+27X^2 \text{ et } R=-116+34X-27X^2.$$

1.5. Racines de polynômes

$\alpha \in \mathbb{K}$ est *racine* de $P \in \mathbb{K}[X]$ si

$$P(\alpha)=0.$$

On dit encore que α est zéro du polynôme P.

Propriété 4

- $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si P est divisible par $(X-\alpha)$.
- Tout polynôme non nul de degré n sur $\mathbb{K}$, admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Soit r un entier non nul. $\alpha \in \mathbb{K}$ est *racine d'ordre r* (ou de *multiplicité r*) de $P \in \mathbb{K}[X]$ si P est divisible par $(X-\alpha)^r$ et n'est pas divisible par $(X-\alpha)^{r+1}$.

<u>Caractérisation</u>
$\alpha \in \mathbb{K}$ est *racine d'ordre r* de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ Q(\alpha) \neq 0 \text{ tel que } P = (X-\alpha)^r Q,$$

ou, si et seulement si,

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

<u>Propriété 5</u> : (Théorème de d'Alembert)
Tout polynôme non nul de degré n de $\mathbb{C}[X]$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité.

<u>Propriété 6</u> : (Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels)
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'ordre r de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre r de P.
Par suite, tout polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

<u>Exemple</u> : Soit $P=(X^2-2)(X^2+1)$, alors les racines de P dans $\mathbb{R}$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, et ses racines dans $\mathbb{C}$ sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, i, et $-i$.

1.6. Polynômes irréductibles

Un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}$ s'il n'est divisible dans $\mathbb{K}[X]$ que par les polynômes constants et les polynômes qui lui sont proportionnels.

<u>Propriété 7</u>
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont
  - les polynômes de degré 1,
  - les polynômes de degré 2 du type $a(X^2+pX+q)$ avec $p^2-4q<0$.

<u>Propriété 8</u>
Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ se factorise de façon unique sous la forme

$$P = kP_1^{r_1}P_2^{r_r}\ldots P_s^{r_s},$$

où $k \in \mathbb{K}^*$, $r_1, r_2, \ldots, r_3 \in N^*$ et $P_1, P_2, \ldots, P_3$ étant des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ normalisés.

<u>Exemple</u> : Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ses racines avec leur ordre de multiplicité $m_1, \ldots, m_k$ tels que $m_1+\ldots+m_k=n$. Alors P peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)^{m_i}.$$

On dit que le polynôme P est *scindé*.

2. Fractions rationnelles

2.1. Fonctions rationnelles

Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. On appelle *fraction rationnelle* sur $\mathbb{K}$ l'élément,

$$\frac{A}{B}.$$

L'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}(X)$.

<u>Règles de calcul dans $\mathbb{K}(X)$</u>

Soient les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$, $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$.

La somme et le produit de F et G sont respectivement définies par

$$F + G = \frac{AD + BC}{BD} \text{ et } F \times G = \frac{AC}{BD}.$$

Les fractions F et G sont égales si et seulement si $AD=BC$.
Si de plus $A \neq 0$, F admet pour inverse la fraction

$$\frac{B}{A}.$$

On dit qu'une fraction rationnelle est *irréductible* si A et B sont premiers entre eux. On appelle alors *pôles* de F, les zéros du dénominateur B.

Soit F une fraction irréductible de $\mathbb{K}(X)$, on lui associe la *fonction rationnelle*,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}. \end{array}$$

2.2. Degré d'une fraction rationnelle

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Le degré de F est donné par

$$d°F = d°A - d°B.$$

<u>Propriété 9</u>

$$d°\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) \leq \max\left(d°\left(\frac{A}{B}\right), d°\left(\frac{C}{D}\right)\right) \text{ et } d°\left(\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}\right) = d°\left(\frac{A}{B}\right) + d°\left(\frac{C}{D}\right).$$

2.3. Dérivation d'une fraction rationnelle

La *dérivée* d'une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ est la fraction rationnelle

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}.$$

Règles de dérivation
Soient F et G des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. On a

$$(F+G)'=F'+G' \qquad (\alpha F)'=\alpha F' \qquad (FG)'=F'G+FG'.$$

2.4. Décomposition en éléments simples

Propriété 10
Toute fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$, s'écrit de manière unique F=E+Q, où E est un polynôme, et Q est une fraction rationnelle telle que d°(Q)<0.

On dit que le polynôme E est la *partie entière* de la fraction F.

Exemple : $F(X)=\dfrac{X^3+X^2+X+1}{X^2-1}$ s'écrit aussi $F(X)=X+1+\dfrac{2(X+1)}{X^2-1}$. La partie entière est alors égale à E(X)=X+1.

Propriété 11
Soit une fraction irréductible de $\mathbb{K}(X)$,

$$F=\frac{A}{B},$$

avec d°B≥1. On considère la décomposition de B en polynômes irréductibles, $B=kB_1^{r_1}B_2^{r_r}\ldots B_s^{r_s}$, où k≠0 et $r_i\geq1$, pour i=1,…,s. Il existe alors une unique famille de polynômes C_{ij}, $(i,j)\in\{1,\ldots s\}\times\{1,\ldots,r_i\}$, telle que

$$F=E+\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{C_{ij}}{(B_i)^j}\right),$$

avec $d^\circ(\frac{C_{ij}}{B_i})<0$, et E la partie entière de F.

Cette écriture est appelée *décomposition en éléments simples* de F dans $\mathbb{K}(X)$.

Exemple (suite) : La fraction F définie ci-dessus peut se décomposer en

$$F(X)=X+1+\frac{1}{2(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}.$$

2.5. Pratique de la décomposition en éléments simples

2.5.1. Cas d'un pôle simple

Former dans $\mathbb{K}(X)$, la décomposition en éléments simples de

$$F(X)=\frac{X}{(X-1)(X-2)}.$$

La partie entière est nulle. La d.e.s. est donc de la forme : $F(X)=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-2}$.

On a : $a=[(X-1)F(X)]_{X=1}=-1$ et $b=[(X-2)F(X)]_{X=2}=2$. D'où

$$F(X)=\frac{-1}{X-1}+\frac{2}{X-2}.$$

2.5.2. *Cas du pôle multiple 0*

On s'intéresse donc à la fraction de la forme

$$F(X)=\frac{A}{TX^n},$$

où $A\in\mathbb{K}[X]$ et $T\in\mathbb{K}[X]$ irréductible. Alors la d.e.s est de la forme

$$F(X)=\frac{a_n}{X^n}+\frac{a_{n-1}}{X^{n-1}}+\ldots+\frac{a_1}{X}+\frac{B}{T}.$$

On a alors $A=(a_n+a_{n-1}X+\ldots+a_1X^{n-1})T+X^nB$, donc $a_n+a_{n-1}X+\ldots+a_1X^{n-1}$ est le quotient de la division de A par T suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n-1.

<u>Exemple</u> : La d.e.s. de $F(X)=\frac{X^5+1}{X^3(X-2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme

$$F(X)=E+\frac{a_3}{X^3}+\frac{a_2}{X^2}+\frac{a_1}{X}+\frac{b}{X-2}.$$

Tout d'abord, on calcule E comme quotient de la division de X^5+1 par X^4-2X^3 et on trouve $X^5+1=(X+2)(X^4-2X^3)+4X^3+1$, d'où

$$F(X)=X+2+\frac{4X^3+1}{X^3(X-2)}.$$

On calcule ensuite b, a_1, a_2 et a_3 par division de $4X^3+1$ par X-2 suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2, et on obtient un quotient

$$1+4X^3=(-2+X)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}X-\frac{1}{8}X^2)+\frac{33}{8}X^3$$

d'où

$$F(X)=X+2-\frac{1}{2X^3}-\frac{1}{4X^2}-\frac{1}{8X}+\frac{33}{8(X-2)}.$$

2.5.3. *Cas d'un pôle multiple quelconque*

Soit par exemple α un pôle multiple de la fraction F (racine multiple du dénominateur). Pour obtenir les coefficients relatifs au pôle dans le d.e.s., on effectue un changement d'indéterminée $Y=X-\alpha$ et on se ramène au cas précédent.

<u>Exemple</u> : La d.e.s. de $F(X)=\frac{1}{(X-1)^4(X+2)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme

$$F(X)=\frac{a_4}{(X-1)^4}+\frac{a_3}{(X-1)^3}+\frac{a_2}{(X-1)^2}+\frac{a_1}{X-1}+\frac{b_3}{(X+2)^3}+\frac{b_2}{(X+2)^2}+\frac{b_1}{X+2}.$$

- Calcul des a_i : changement d'indéterminée $Y=X-1 \Leftrightarrow X=Y+1$, d'où

$$F=\frac{1}{Y^4(Y+3)^3}.$$

  On obtient alors les a_i en divisant 1 par $(Y+3)^3$ suivants les puissances croissantes, d'où $a_4=1/27$, $a_3=-1/27$, $a_2=2/81$ et $a_1=-10/728$.

- Calcul des b_i : changement d'indéterminée Z=X+2 $\Leftrightarrow$ X=Z-2, d'où

$$F = \frac{1}{Z^3 (Z-3)^4}.$$

On obtient alors les b_i en divisant 1 par $(Z-3)^4$ suivants les puissances croissantes, d'où b_3=1/81, b_2=4/243 et b_1=10/729.

2.5.4. Cas d'un polynôme de degré 2 irréductible

2.5.5. *Quelques pratiques*

Les méthodes vues précédemment permettent en principe de former les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$.

Néanmoins, un certain nombre de techniques facilitent le travail :

- En diminuant globalement le nombre de coefficients à calculer.
- En permettant de calculer des coefficients peu facilement "accessibles", à condition cependant qu'il ne reste à ce stade que peu d'inconnues.

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction à coefficients réels

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{R}(X)$.

On peut considérer F comme un élément de $\mathbb{C}(X)$ et la décomposer en tant que telle.

Tout comme F, cette décomposition doit être invariante par conjugaison.

Il en résulte par exemple que la partie entière de F est un polynôme réel.

Il en résulte également que les parties polaires sont conjuguées deux à deux. Plus précisément, si α et $\overline{\alpha}$ sont deux pôles conjugués non réels de F, de multiplicité m, les parties polaires s'écrivent respectivement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\lambda_k}}{(X-\overline{\alpha})^k}$.

Cette idée permet donc de diminuer de moitié environ le nombre d'inconnues.

Il est également possible d'utiliser la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle réelle F pour obtenir sa décomposition dans $\mathbb{R}$ après regroupement des termes conjugués. Cette méthode n'est envisageable que si les pôles non réels sont de multiplicité 1.

Utilisation de la parité ou de l'imparité

Si une fraction rationnelle est paire ou impaire, sa décomposition doit refléter cette propriété. On exprime cette invariance par les transformations $X \mapsto F(-X)$ ou $X \mapsto -F(-X)$, et on en déduit des relations sur les coefficients (le nombre d'inconnues diminue environ de moitié).

Utilisation d'une transformation laissant la fraction invariante

Il est possible (même si c'est plus rare qu'avec la parité ou l'imparité) que la fraction rationnelle F soit invariante (ou très simplement modifiée, par exemple changée en son opposée) par une transformation "simple", comme :

$$X \mapsto \lambda - \mathrm{X}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{X} \mapsto \lambda\mathrm{X}, \quad \mathrm{X} \mapsto \frac{1}{\mathrm{X}}, \quad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}.$$

La décomposition de F doit refléter la même invariance. Exprimer cette invariance donne là encore des relations sur les coefficients inconnus.

Injection de valeurs particulières

Quand il reste peu de coefficients à calculer, il peut être intéressant d'injecter, dans l'égalité entre F et sa décomposition, une ou plusieurs valeurs qui ne soient pas des pôles de F.
Si F est dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$, on peut injecter une valeur complexe comme i (ou j), l'identification donnant alors deux relations entre les coefficients réels inconnus.

Utilisation de la méthode $\lim\limits_{x\to\infty} xF(x)$

On suppose ici que le degré de F est strictement négatif (la partie entière est donc nulle).
La décomposition de F fait apparaître des termes du type $\dfrac{\lambda_k}{\mathrm{X}-\alpha_k}$ ou $\dfrac{a_k\mathrm{X}+b_k}{\mathrm{X}^2+\beta_k\mathrm{X}+\gamma_k}$.
Le calcul de $\lim\limits_{x\to\infty} x\widetilde{F}(x)$ donne alors une relation liant les coefficients λ_k et a_k.
Cette méthode est intéressante quand il ne reste plus que un ou deux coefficients à calculer.