ALGEBRE

T.D. n°5

Lois de composition interne, groupes, anneaux

LOIS INTERNES

Exercice 1

Soit E=$\mathbb{R}$. On définit la loi # par :

$$\forall a\in E,\ \forall b\in E,\ a\#b=a+b+ab.$$

1) La loi # est-elle commutative ?
2) La loi # est-elle associative ?
3) Admet-elle un élément neutre ?
4) Tout élément de E admet-il un symétrique ?
5) La loi # est-elle distributive (à droite et à gauche) par rapport à l'addition ? la multiplication ?

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles non vides et soit « T » une opération sur F. Soient f et g dans $\mathcal{F}$(E,F). On définit l'opération sur $\mathcal{F}$(E,F), f*g, telle que

$$\forall x\in E,\ (f*g)(x)=f(x)Tg(x).$$

Montrer que :
1) Si « T » est commutative ou associative, il en est de même pour « * ».
2) Si (F,T) admet un élément neutre e, alors l'application constante définie par $\varphi(x)=e$ est un élément neutre de ($\mathcal{F}$(E,F),*).

Exercice 3

Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne * associative.
1) Montrer que si a et b sont réguliers alors a*b est régulier.
2) Monter que si a admet un symétrique alors a est régulier. Montrer que la réciproque est fausse

Exercice 4

Sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit les deux lois suivantes :

l'addition : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$,

la multiplication : $(x,y)(x',y')=(xx',yy')$.

On note que les deux opérations sont commutatives.
1) Montrer qu'elles admettent un élément neutre.
2) Montrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 5

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer la composition usuelle « o » est distributive à droite par rapport à « + » mais pas à gauche.

Exercice 6

Soit (E,.). Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit l'opération « * » par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E),\ A*B=\{x\in E,\ \exists (a,b)\in A\times B,\ x=a.b\}$$

1) Montrer que si « . » est associative ou commutative, il en est de même pour « * ».
2) Montrer que si e est un élément neutre de (E,.), alors {e} est un élément neutre de
($\mathcal{P}(E)$,*).

Exercice 7

On suppose que E est muni de deux opérations * et T, admettant e et ε comme éléments neutres respectivement, et que chacune des deux lois est distributive par rapport à l'autre.

1) Montrer que $eTe=e$ et que $\varepsilon*\varepsilon=\varepsilon$.
2) Montrer que tout élément de E est idempotent (xTx=x et x*x=x, $\forall x\in E$) pour chacune des deux lois.

GROUPES

Exercice 8

Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3(x)=-x,\ f_4(x)=-\frac{1}{x}.$$

Montrer que G={f_1,f_2,f_3,f_4} muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe.

Exercice 9

Les ensembles suivants sont-ils des groupes pour les lois considérées ? Si oui, sont-ils abélien ?

1) G=]−1,1[muni de la loi $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$
2) H={z∈ C , |z|=2} muni de la multiplication usuelle
3) $\mathbb{R}_+$ muni de l'addition usuelle

Exercice 10

Soit (G,*) un groupe tel que tout élément soit son propre symétrique. Montrer que G est commutatif.

Exercice 11

Soient S un sous-groupe d'un groupe (G,*) et a∈G. Montrer que $a^{-1}*S*a$ est un sous-groupe de G, dit conjugué de S.

Exercice 12
Soient E un ensemble, (G,*) un groupe, et f une bijection de E vers G. On définit la loi de composition interne, notée #, par : $\forall(x,y)\in E^2$, $x\#y=f^{-1}(f(x)*f(y))$. Montrer que (E, #) est un groupe.

MORPHISME DE GROUPES

Exercice 13
On considère deux groupes G et G', deux homomorphismes de groupes f et g définis sur G dans G', et on appelle H l'ensemble des éléments x de G tels que f(x)=g(x). Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x)=e^{ix}$.

1) Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2) Déterminer le noyau de f. Est-elle injective ?
3) Déterminer son image.

Exercice 15
Soit (G,*) un groupe.

1) Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté Aut(G).
2) Montrer que l'application suivante est un morphisme de groupes.

$$\Psi : (G,*) \to (\mathrm{Aut}(G), \circ)$$
$$a \mapsto \varphi_a$$

où φ_a est l'application de G dans lui même définie par $\varphi_a : x \mapsto a*x*a^{-1}$.

3) Déterminer son noyau.

ANNEAUX

Exercice 16
Soit U_A l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau (A,+, .).

1) Montrer que U_A est stable par la multiplication.
2) Montrer que $(U_A, .)$ est un groupe.

Exercice 17
Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Soient $A=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $B=\{f\in A,\ f(x_0)=0\}$.

1) Montrer que A est un anneau pour l'addition et la multiplication de fonctions.
2) Montrer que B est un sous-groupe de (A,+).
3) Montrer que B est stable par la multiplication de A.
4) B est-il un sous-anneau de A ?

Exercice 18

Soit $(A,+,.)$ un anneau et $Z(A)=\{x\in A,\ xa=ax,\ \forall a\in A\}$, le centre de A. Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.

Exercice 19

On définit sur R les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par : $\forall x\in R$, $\forall y\in R$,

$$x\oplus y=x+y-1$$
$$x\otimes y=x+y-xy$$

1) Montrer que $(R,\oplus,\otimes)$ est un anneau commutatif.
2) Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $(R,\oplus,\otimes)$. Est-ce un corps ?

Exercice 20

Soit $(A,+,.)$ un anneau

1) Soient a et b des éléments nilpotents de A tels que a et b commutent. Montrer que $(a+b)$ et (ab) sont nilpotents.
2) Montrer que si a est un élément nilpotent de A alors 1_A-a est inversible. Calculer son inverse.