

3. Relations binaires

Exercice 3.1. Les relations suivantes sont-elles symétriques, réflexives, transitives ?

1. sur \mathbb{R} , l'égalité
2. sur \mathbb{R} , l'ordre strict $<$
3. sur \mathbb{R} , l'ordre \leq
4. sur \mathbb{R} , la relation « avoir le même carré »
5. sur \mathbb{R} , la relation « avoir le même sinus »
6. sur l'ensemble des droites du plan, le parallélisme
7. sur l'ensemble des droites du plan, l'orthogonalité

Exercice 3.2. Étudier la relation \mathcal{R} définie sur l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow (\exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x))$$

Exercice 3.3. Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes. Dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale et si l'ensemble admet un plus petit ou un plus grand élément.

1. Soit E un ensemble, on définit sur $\mathcal{P}(E) : A\mathcal{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$.
2. Soit E un ensemble, on définit sur $\mathcal{P}(E) : A\mathcal{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
3. Sur \mathbb{Z} on définit : $a\mathcal{R}_3b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité.
4. Sur \mathbb{Z} on définit : $a\mathcal{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} a - b = 3n$.
5. Sur \mathbb{Z} on définit : $a\mathcal{R}_5b \Leftrightarrow a - b$ est divisible par 3.
6. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit sur $\mathcal{P}(E) : X\mathcal{R}_6Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$

Exercice 3.4 (Produit cartésien). Soit deux ensembles E et F et deux relations d'équivalences \mathcal{R} sur E et \mathcal{S} sur F . On définit alors sur $E \times F$ la relation :

$$(x; y) \sim (x'; y') \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } x'\mathcal{S}y')$$

Vérifier que \sim est une relation d'équivalence.

Exercice 3.5. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$:

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

Étudier cette relation.

Exercice 3.6. Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire sur E , réflexive et transitive. On définit les relations :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } t)$$

$$x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } t)$$

Les relations \mathcal{S} et \mathcal{T} sont-elles des relations d'équivalence ?

Exercice 3.7.

1. On définit une relation binaire \preccurlyeq sur \mathbb{R}_+^* par

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

2. Soit \preccurlyeq la relation définie sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \text{ ou } y \leq x'.$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur E .

3. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire \preccurlyeq par

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur E .

Exercice 3.8. On définit sur \mathbb{R}^2 la relation :

$$(x;y) \ll (x';y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$$

- Vérifier que \ll est une relation d'ordre.
- Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple $(a;b)$.
- L'ordre est-il total ?

Exercice 3.9. Soit X un ensemble et R une relation d'équivalence sur X . Pour $x \in X$, on note $[x]$ sa classe d'équivalence. Montrer que :

- $\forall x \in X, x \in [x]$.
- $\forall (x,y) \in X^2, x \in [y] \iff y \in [x] \iff [x] = [y] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Exercice 3.10. Soit $n > 0$ un entier et \equiv_n la relation binaire définie sur \mathbb{Z} par :

$$a \equiv_n b \iff n \text{ divise } a - b.$$

On parle d'égalité modulo n , aussi notée $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b[n]$.

- Montrer que \equiv_n est une relation d'équivalence.
- Combien existe-t-il de classes d'équivalence ? Donner un système de représentants.
- Montrer que \equiv_n est compatible avec l'addition et la multiplication de \mathbb{Z} .

Exercice 3.11. Soit \mathcal{R} une relation symétrique et réflexive sur un ensemble X . On définit une relation \mathcal{S} sur X par

$$x \mathcal{S} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists z_0, \dots, z_n \in X, z_0 = x, z_n = y, \forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z_i \mathcal{R} z_{i+1}$$

Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence.