1. Logique et raisonnement

1.1. Rudiments de logique

Exercice 1.1. Décrire les parties de $\mathbb{R}$ qui sont définies par les propositions suivantes :

1. $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
2. $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
3. $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
4. $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Exercice 1.2. Montrer que les équivalences suivantes sont toujours vraies :

1. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$
2. $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
3. $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
4. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

Exercice 1.3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences suivantes

1. $\text{NON}(\text{NON}(P)) \Leftrightarrow P$
2. $(P \text{ ET } P) \Leftrightarrow P$
3. $(P \text{ OU } P) \Leftrightarrow P$
4. $(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P)$
5. $(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ OU } P)$
6. $(P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } Q) \text{ ET } R)$
7. $(P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ OU } R)$
8. $\text{NON}(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \text{ OU } \text{NON}(Q))$
9. $\text{NON}(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \text{ ET } \text{NON}(Q))$
10. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P))$
11. $(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R))$
12. $(P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R))$
13. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \text{ OU } Q)$
14. $\text{NON}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ET } \text{NON}(Q))$
15. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(Q) \Rightarrow \text{NON}(P))$
16. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \Leftrightarrow \text{NON}(Q))$
17. $(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \Rightarrow Q)$

Exercice 1.4. Sans utiliser de table de vérité (mais en utilisant les différentes propriétés déjà démontrées), (re-)démontrer que « $\text{NON}(P \Rightarrow Q)$ » est équivalent à « $P \text{ ET } \text{NON}(Q)$ ».

Exercice 1.5. Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un individu, y un film et que $\mathcal{P}(x,y)$ est la proposition « L'individu x a vu le film y ».

1. $\forall x,\ \forall y,\ \mathcal{P}(x,y)$
2. $\exists x,\ \forall y,\ \mathcal{P}(x,y)$
3. $\exists y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y)$
4. $\forall x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)$
5. $\exists x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)$
6. $\exists y,\ \exists x,\ \mathcal{P}(x,y)$
7. $\forall y,\ \exists x,\ \mathcal{P}(x,y)$

Exercice 1.6. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer verbalement la signification des propositions suivantes :

1. $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I,\ f(x) = \lambda$
2. $\forall\, x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in I,\ f(x) = y$
4. $\forall\, (x;y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 1.7. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est l'application nulle.
2. f n'est pas l'application nulle.
3. La fonction f s'annule.
4. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
5. f est une fonction constante.
6. La fonction f n'est pas une fonction constante.
7. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
8. La fonction f présente un minimum.
9. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
10. f est une fonction affine.

Exercice 1.8. Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geq 3$
2. $0 < x \leq 2$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$
7. $P \text{ ET } \text{NON}(Q)$
8. $P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)$
9. $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$
10. $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
11. « Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».
12. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
13. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
14. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$
15. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$

Exercice 1.9. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des propositions suivantes :

1. $\forall\, x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in I,\ f(x) = y$
3. $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ |f(x)| \leq M$
4. $\forall\, (x;y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 1.10. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$)

1. $x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 = 4 \ \ldots\ldots\ x = 2$
2. $z \in \mathbb{C}\,;\ z = \overline{z} \ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R}\,;\ x = \pi \ \ldots\ldots\ \mathrm{e}^{2ix} = 1$

Exercice 1.11. Reprendre l'exercice 1.5 en donnant à chaque fois les négations en toutes lettres et avec les quantificateurs.

Exercice 1.12. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geq 3$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4. $\exists n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k \geq 100$

Exercice 1.13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des propositions suivantes, donner graphiquement à main levée un exemple de fonction f NE la vérifiant PAS.

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ OU $f(x) \leq -1$

Exercice 1.14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indiquer la différence de sens entre les deux propositions proposées :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$

1.2. Méthodes de Raisonnements

1.2.1. Directe, contraposée, absurde et analyse-synthèse

Exercice 1.15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$(f \text{ impaire}) \Rightarrow (f(0) = 0)$$

Exercice 1.16.

1. Soit n un entier, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.
3. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1.17. Soit x un réel positif. Montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$$

Exercice 1.18. Soit a et b deux réels. Montrer en utilisant deux méthodes que $(a + b \geq 1) \Rightarrow \left(a \geq \frac{1}{2} \text{ OU } b \geq \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 1.19. Soit a et b deux réels. Montrer que $\left(a^2 + b^2 = 0\right) \Rightarrow (a = b = 0)$;

Exercice 1.20. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :

1. La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.
2. La somme et le produit d'un nombre rationnel (non nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.
3. Un rectangle a pour aire $170\,\mathrm{m}^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13\,\mathrm{m}$.

Exercice 1.21. Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$, alors les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Exercice 1.22. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

Exercice 1.23. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0;1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$)
4. Donner une preuve en utilisant le principe des tiroirs vu à l'exercice 1.22.

Exercice 1.24. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + x f(1-x) = 1 + x$.

Exercice 1.25. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donner cette décomposition si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 1.26. Deux joueurs s'affrontent sur le jeu suivant. Ils disent chacun leur tour un nombre entre 1 et 7. Les nombres sont additionnés et dès que le cumul des nombres qu'ils ont proposés vaut 100 , le jeu est fini. Le joueur qui a atteint 100 et a donc parlé en dernier gagne.
Comment jouer ?

Exercice 1.27. Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{1}{2}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1} \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $f(x) = y$.

1.2.2. Divers

Exercice 1.28. Un vol a été commis dans un asile. Trois pensionnaires A, B et C sont suspects. Voici leurs témoignages, chacun formulant trois assertions :

A : Je suis innocent. À l'heure du vol, j'étais avec B. C'est C le coupable.
B : Je suis innocent. A aussi. A n'était pas avec moi à l'heure du vol.
C : Je suis innocent. B aussi. A a menti trois fois.

Vous savez que chaque suspect a au moins menti une fois sur ses trois affirmations. Qui est le coupable ?

Exercice 1.29. Thomas, Jules et Yves sont partis contempler des oiseaux. Chacun a vu un oiseau que les deux autres n'ont pas vu. Chaque deux ont vu un oiseau que le troisième n'a pas vu, et un oiseau a été vu par les trois.
Parmi les oiseaux que Thomas a vus, deux sont jaunes. Parmi ceux vus par Jules, trois sont jaunes, et parmi ceux vus par Yves, quatre sont jaunes.

Combien d'oiseaux jaunes ont été vus au total ? Combien d'oiseaux non jaunes ont été vus au total ?

1.3. Propriétés de $\mathbb{N}$

Exercice 1.30. Démontrer par récurrence les égalités suivantes pour tout entier naturel non nul n.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 1.31. Démontrer que

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a+b)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exercice 1.32. Démontrer que pour tout entier naturel n :

1. 3 divise $(4^n + 2)$
2. 7 divise $(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

Exercice 1.33. Un élève démontre par récurrence que si l'on prend n objets, ils ont tous la même couleur. Voici sa démonstration :

> Si on prend un seul objet, il n'y a rien à prouver.
> Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On considère donc n objets, que l'on numérote de 1 à n. On forme un premier tas constitué des objets 1 à $n-1$. Il y a $n-1$ objets : par hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. On forme ensuite un second tas constitué des objets 2 à n. De même, ils ont tous la même couleur. Comme l'objet numéro 2 appartient aux deux tas, les couleurs du 1er et du 2e tas sont identiques : tous les objets ont la même couleur !

Déterminer l'erreur.

Exercice 1.34. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 1.35. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Exercice 1.36. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 1$

Exercice 1.37. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

Exercice 1.38. Montrer par récurrence que tout entier $n \geq 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

Exercice 1.39. Montrer que si a est un entier impair, alors pour tout entier $n \geq 1$, $a^{2^n} - 1$ est divisible par 2^{n+2} .

Exercice 1.40. Montrer que pour tout entier naturel n, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 1.41. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos(\theta)$, et pour $n \geq 2$, $u_n = 2u_1 u_{n-1} - u_{n-2}$. Montrer que pour tout entier n, $u_n = \cos(n\theta)$.

Exercice 1.42. Déterminer une expression explicite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_{n+1} = 1 - u_n$
2. $u_{n+1} = u_n + 2n$