9. Systèmes linéaires

9.1. Systèmes linéaires d'équations algébriques

Exercice 9.1. Résoudre le systèmes d'inconnue $(x;y;z;t) \in \mathbb{C}^4$ suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 \\ -2x + 3y - 5z + t = 0 \\ 3x - 4y + 7z - 3t = -5 \\ 2x + 3y + 8z + 2t = -6 \end{cases}$$

Exercice 9.2. Résoudre le système d'inconnue $(x;y;z;t) \in \mathbb{C}^4$ suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = -1 \\ 3x + y + z + 2t = 6 \\ x - 3y + 3z - t = 5 \\ 5x + 5y - z + 7t = 5 \end{cases}$$

Exercice 9.3. Discuter selon $m \in \mathbb{C}$ les solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m+1 \end{cases}$

Exercice 9.4. Discuter selon $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ les solutions des systèmes d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{C}^3$ suivants :

1. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + ay + bz = a \\ x + by + az = b \\ ax + y + bz = a \\ bx + y + az = b \end{cases}$

Exercice 9.5. Discuter selon $m \in \mathbb{C}$ les solutions du systèmes d'inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \\ x + my + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \end{cases}$$

Exercice 9.6. Résoudre le système de n équations suivant, d'inconnue $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1\\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1
\end{array}\right.$$

Exercice 9.7. On considère $n\geq 3$ points $A_1,\dots,A_n$ du plan complexe, d'affixe respectives $a_1,\dots,a_n$. Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe au moins un polygone à n sommets $M_1,\dots,M_n$ tel que :

$$A_n \text{ est le milieu de } [M_nM_1] \text{ et } \forall k\in [\![1\,;n-1]\!],\ A_k \text{ est le milieu de } [M_kM_{k+1}]$$

9.2. Rang d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exercice 9.8. Calculer le rang des matrices suivantes en fonctions des paramètres qui les définissent :

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-1&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&0&2&2\\2&3&4&1\\6&0&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&t&1\\t&1&1\\1&t&1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}.$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-2&-3&0&-5\\4&9&6&7\\1&-1&-5&5\end{pmatrix}\quad;\quad E=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}\quad;\quad F=\begin{pmatrix}1&\cos(\theta)&\cos(2\theta)\\\cos(\theta)&\cos(2\theta)&\cos(3\theta)\\\cos(2\theta)&\cos(3\theta)&\cos(4\theta)\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}a&b&0&0&\dots&0\\0&a&b&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\dots&0&a&b\\b&0&\dots&0&0&a\end{pmatrix}$$

Exercice 9.9. Déterminer selon la valeur de a le rang de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\a&a^2&a^3&1\\a^2&a^3&1&a\\a^3&1&a&a^2\end{pmatrix}$$

Exercice 9.10. Déterminer le rang de la matrice carrée $A=[a_{ij}]_{(i;j)\in[\![i;j]\!]^2}$ d'ordre $n\geq 1$ définie par :

$$a_{ij}=\sin(i+j)$$