Applications

TD

Proposition de correction

Exercice. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Déterminer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Déterminer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Quand est-il vrai que $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$?

1. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B))\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}A - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
2. $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})} = \mathbb{1}_{A\cup B}\mathbb{1}_{\overline{A\cap B}} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
3. Si cet exercice sur les ensembles est dans ce chapitre c'est qu'il vaut mieux utiliser les fonctions indicatrices (et la question précédente nous met sur la piste…)

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta(B\cap C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\cap C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\Delta B)\cap(A\Delta C)} &= \mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_{A\Delta C} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A\mathbb{1}C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

Donc les deux fonctions caractéristiques sont égales si et seulement si

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\ \Leftrightarrow&\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C = 0\\ \Leftrightarrow&\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) = 0 = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}\end{aligned}$$

Donc l'égalité a lieu si et seulement si $A\cap(B\Delta C) = \emptyset$, c'est-à-dire $B\Delta C\subset\overline{A}$.

Exercice. On considère l'ensemble des être humains.

1. À chaque individu on lui associe « sa mère ». Cela définit-il une application ?
2. Si oui, est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Mêmes questions avec « sa sœur ».

1. Chaque individu a exactement une mère (biologique) (Un individu peut ne plus avoir de mère encore vivante). Donc nous définissons bien une application.
2. Elle n'est pas injective car deux individus peuvent avoir la même mère. Elle n'est pas non plus surjective car tout individu (surtout les hommes) ne sont pas forcément la mère de quelqu'un.
3. Un individu pouvant avoir plusieurs sœurs, cela ne définit pas une application.

Exercice. Soit $f : E \to F$ une application. Discuter des affirmations suivantes (E et F sont de cardinal strictement supérieur à 1) :

1. $\forall x\in E,\ \forall y\in F,\ f(x) = y$
2. $\forall x\in E,\ \exists y\in F,\ f(x) = y$
3. $\exists x\in E,\ \forall y\in F,\ f(x) = y$
4. $\exists x\in E,\ \exists y\in F,\ f(x) = y$
5. $\forall y\in F,\ \forall x\in E,\ f(x) = y$
6. $\forall y\in F,\ \exists x\in E,\ f(x) = y$
7. $\exists y\in F,\ \forall x\in E,\ f(x) = y$
8. $\exists y\in F,\ \exists x\in E,\ f(x) = y$

1. Toujours faux.
2. Vrai (voir la définition d'une application).
3. Impossible.
4. Vrai (sinon f n'est pas définie) (et cela découle de la deuxième proposition).
5. Idem que la première.
6. Vrai uniquement si f est surjective.
7. Vrai uniquement si f est constante.
8. Idem que la quatrième proposition.

Exercice. On définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_2 = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right. \quad f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_3 = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+x \end{array} \right.$$

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_4 = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+2 \end{array} \right. \quad f_5 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_5 = [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \quad f_6 : \left\{ \begin{array}{rcl} A_6 =]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

1. Pour tout $i \in [\![1;6]\!]$:
   a) Tracer la courbe représentative de f_i.
   b) Dire si f_i est injective, surjective, bijective.
   c) Si f_i n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_i et F_i tels que f_i soit une bijection de E_i sur F_i.
   d) Déterminer les ensembles $f_i(A_i)$, $f_i(]0;2])$, $f_i^{-1}(]-1;1[)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de chacune des applications suivantes :

   a) $f_1 \circ f_2$ b) $f_2 \circ f_1$ c) $f_4 \circ f_5$ d) $f_6 \circ f_5$

1. **i=1** a) Hyperbole connue.
   b) Injective. Pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
   c) $E_1 = A_1 = F_1$.
   d) $f_1(A_1) = A_1$, $f_1(]0;2]) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f_1^{-1}(]-1;1[) =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

   i=2 a) Sinusoïde connue.
   b) Pas injective. Pas surjective.
   c) $E_2 = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $F_2 = [-1;1]$.
   d) $f_2(A_2) = [-1;1]$, $f_2(]0;2]) =]0;1]$ (car $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$), $f_2^{-1}(]-1;1[) = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[+k\pi$.

   i=3 a) Simple parabole.
   b) Pas injective car $f(0) = 0 = f(-1)$. Pas surjective car -1 n'a pas d'antécédents ($x^2+x+4 = 0$ n'a pas de solutions).
   c) $E_3 = \left[-\frac{1}{2};+\infty\right]$, $F_3 = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right]$.
   d) $f_3(A_3) = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right]$, $f_3(]0;2]) =]0;6]$, $f_3^{-1}(]-1;1[) = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

   i=4 a) Simple droite.
   b) Bijective.
   c) $E_4 = F_4 = \mathbb{R}$.
   d) $f_4(A_4) = \mathbb{R}$, $f_4(]0;2]) =]2;8]$, $f_4^{-1}(]-1;1[) = \left]-1;-\frac{1}{3}\right[$.

   i=5 a) Parabole (couchée) connue.
   b) Injective et non surjective.
   c) $E_5 = F_5 = \mathbb{R}_+$.
   d) $f_5(A_5) = \mathbb{R}_+$, $f_5(]0;2]) = \left]0;\sqrt{2}\right]$, $f_1^{-1}(]-1;1[) =]0;1[$.

   i=6 a) Courbe connue.
   b) Bijective.
   c) $E_6 = A_6$, $F_6 = \mathbb{R}$.
   d) $f_6(A_6) = \mathbb{R}$, $f_6(]0;2]) =]-\infty;\ln(2)]$, $f_1^{-1}(]-1;1[) = \left]\frac{1}{e};e\right[$.
2. a) $f_1 \circ f_2(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Domaine de définition : $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$.
   b) $f_2 \circ f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Domaine de définition : $\mathbb{R}^*$.
   c) $f_4 \circ f_5(x) = 3\sqrt{x}+2$. Domaine de définition : $\mathbb{R}_+$.
   d) $f_6 \circ f_5(x) = \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$. Domaine de définition : $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1;1[$.

1. $f(0) = f(1) = 0$. Donc l'application n'est pas injective. Toute valeur de $[-1;1]$ est atteinte par la fonction sinus, donc l'application est surjective. Elle n'est pas bijective.
2. La fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$ (même chose avec les intervalles ouverts). Donc l'application g est aussi bijective de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1;1[$.

Exercice. On définit l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+\frac{1}{z} \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer l'image par f du cercle unité (centre 0 et rayon 1).
3. Déterminer l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$.

1. Nous avons clairement $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Donc f n'est pas injective. Soit $a \in \mathbb{C}$. $f(z) = a \Leftrightarrow z^2 - az + 1 = 0$. Or une équation du second degré possède toujours au moins une solution (dans $\mathbb{C}$). Donc f est surjective.
2. Si z est sur le cercle unité, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$. D'où $f(z) = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Donc l'image est incluse dans l'intervalle réel $[-2;2]$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $y \in [-2;2]$ et posons $z = \frac{y}{2} + i\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$. Puisque $y \in [-2;2]$, le terme sous la racine est positif et z est bien défini. Nous avons $|z| = \frac{y^2}{4} + 1 - \frac{y^2}{4} = 1$ et $2\mathrm{Re}(z) = y$. Ainsi, z est bien un antécédent de y par f, appartenant au cercle unité. L'image du cercle unité est donc bien $[-2;2]$.
3. On cherche les antécédents de ib avec $b \in \mathbb{R}$. Nous avons vu que cela revenait à résoudre l'équation $z^2 - ibz + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -b^2 - 4 = i^2(b^2+4) < 0$. Les solutions sont donc $z_{1,2} = \frac{ib \pm \sqrt{b^2+4}}{2} = \frac{i}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2+4}\right)$. Puisque $\sqrt{b^2+4} > |b|$, nous avons que $b \pm \sqrt{b^2+4}$ parcourt $\mathbb{R}$ lorsque b parcourt $\mathbb{R}$. Donc l'image réciproque de $i\mathbb{R}$ est incluse dans $i\mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $ib \in i\mathbb{R}$, $f(ib) = ib + \frac{1}{ib} = ib - \frac{i}{b} = i\left(b - \frac{1}{b}\right) \in i\mathbb{R}$. D'où $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ et en utilisant un résultat de l'exercice **??**, $i\mathbb{R} \subset f^{-1}(f(i\mathbb{R})) \subset f^{-1}(i\mathbb{R})$. Finalement, $f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

Le sens indirect ($\Leftarrow$) est évident.
Si $g \circ f$ est bijectif, alors il est surjectif et donc g aussi (d'après l'exercice **??**). De même, puisque $h \circ g$ est injective, g aussi. Donc g est bijective. Finalement, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective par composée de fonctions bijective. De même pour h.

Exercice. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, et $h : G \to E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ injective, $g \circ f \circ h$ injective et $f \circ h \circ g$ surjective. Montrer que f, g et h sont bijective.

D'après l'exercice **??**, f, $g \circ f$, $f \circ h$ et h sont injectives, et f et $f \circ h$ sont surjectives. On en déduit que f est bijective, ainsi que $f \circ h$. D'où h bijective. Il ne reste plus qu'à montrer que g est injective et surjective.

Injective : Soit y_1 et y_2 dans F tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Montrons que $y_1 = y_2$. Puisque f est bijective, y_1 et y_2 possèdent chacun un unique antécédent x_1 et x_2. Ainsi $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. En composant par h nous avons $h \circ g \circ f(x_1) = h \circ g \circ f(x_2)$ et par injectivité de cette dernière application, nous avons $x_1 = x_2$, d'où $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ et g est injective.

Surjective : Soit $z \in G$. Nous cherchons $x \in F$ tel que $g(x) = z$. Puisque l'ensemble d'arriver de h est l'ensemble de départ de f, nous pouvons composer en boucle : $y = f \circ h(z) \in F$. Or $f \circ h \circ g : F \to F$ est surjective, donc y possède (au moins) un antécédent $x \in F$ tel que $f \circ h \circ g(x) = y = f \circ h(z)$. Mais puisque f et h sont bijectives, $f \circ h$ aussi, nous avons donc unicité de l'image et donc $z = g(x)$. D'où g est surjective.

Autre méthode : $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective et $g = (f \circ h)^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ est surjective.

Exercice. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'implication suivante :
(f est surjective) $\Rightarrow$ (pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \to G$, $g \circ f = h \circ f \ \Rightarrow\ g = h$)
On admettra que l'implication réciproque est vraie.

Soit f surjective, un ensemble G et deux applications g et h de F dans G telles que $g \circ f = h \circ f$. Montrons qu'alors $g = h$. Soit $y \in F$. Par surjectivité de f, nous avons l'existence d'un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$. Nous avons donc montré que pour tout $y \in F$, $g(y) = h(y)$, c'est-à-dire $g = h$.

Exercice. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'équivalence suivante :
(f est bijective) $\Leftrightarrow$ ($\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$)

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est bijective. Soit $A \subset E$.

- $\boxed{\subset}$: Soit $y \in f(\overline{A})$. Il existe donc $x_1 \in \overline{A}$ tel que $y = f(x_1)$. Par injectivité de f, ce x_1 est unique, c'est-à-dire que pour tout $x \in A$, $f(x) \neq y$. Donc $y \notin f(A)$, c'est-à-dire $y \in \overline{f(A)}$.
- $\boxed{\supset}$: Soit $y \in \overline{f(A)} \subset F$. Par surjectivité de f, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y$. Si $x_1 \in A$, alors $y = f(x_1) \in f(A)$, ce qui n'est pas le cas. Donc $x_1 \notin A$, c'est-à-dire $x_1 \in \overline{A}$. D'où $y \in f(\overline{A})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons maintenant la réciproque.

Injectivité : Soit x_1 et x_2 deux éléments de E et posons $A = \{x_1\} \subset E$. Nous avons alors $f(A) = \{f(x_1)\}$. Si $x_2 \neq x_1$, alors $x_2 \in \overline{A}$ et par conséquent, d'après l'hypothèse, $f(x_2) \in \overline{f(A)} = \overline{\{f(x_1)\}}$. Donc $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Surjectivité : Nous avons $E \subset E$, donc $\overline{f(E)} = f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$. D'où $f(E) = F$ et f est surjective.

Exercice (Factorisation d'application).

1. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer que :

$$(\text{il existe une application } h : G \to F \text{ telle que } g = f \circ h) \Leftrightarrow (g(G) \subset f(F))$$

À quelle condition h est-elle unique ?

2. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer que :

$$(\text{il existe une application } h : F \to G \text{ telle que } g = h \circ f) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y))$$

À quelle condition h est-elle unique ?

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $y \in g(G)$. Alors il existe $x \in G$ tel que $y = g(x) = f \circ h(x)$. Or $h(x) \in F$, d'où $f \circ h(x) \in f(F)$ et $y \in f(F)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in G$. Tentons de construire une image de x par h. Nous avons $g(x) \in g(G) \subset f(F)$, donc il existe (au moins) un $y \in F$ tel que $f(y) = g(x)$. Il suffit alors de poser $y = h(x)$ pour avoir $f \circ h(x) = g(x)$.
L'application h est unique à condition que le y, antécédent de $g(x)$, est unique. Ceci est vérifié dès que f est injective.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Alors, $g(x) = h \circ f(x) = h \circ f(y) = g(y)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $y \in F$. On cherche à construire $z \in G$ tel que $z = h(y)$. Si y possède un antécédent par f, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Il suffit alors de poser $z = h(y) = g(x)$ pour avoir $h \circ f(x) = g(x)$. Ceci est réalisable sans ambigüité car si y possède un second antécédent x', alors $f(x') = y = f(x)$ et donc, par hypothèse $g(x') = g(x) = z = h(y)$.
Si y ne possède pas d'antécédents, on peut donner n'importe quelle valeur à $h(y)$, cela n'affectera pas l'égalité $g(x) = h \circ f(x)$.
L'application h est unique à condition que pour tout y, le choix de $h(y)$ est unique. Ceci est vérifié dès que tout éléments de F possède au moins un antécédent, c'est-à-dire dès que f est surjective.

Exercice. Soit $f : E \to F$ une application. On considère les applications :

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

Montrer les équivalences suivantes :

1. f injective $\Leftrightarrow$ δ injective $\Leftrightarrow$ ρ surjective
2. f surjective $\Leftrightarrow$ δ surjective $\Leftrightarrow$ ρ injective

1.
   — Supposons f injective et montrons δ injective. Soit A et B deux parties de E telles que $\delta(A) = f(A) = \delta(B) = f(B)$. Soit $x \in A$, nous avons $f(x) \in f(A) = f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $f(x_2) = f(x)$. Par injectivité de f, nous avons $x = x_2$, d'où $x \in B$ et $A \subset B$. De la même manière, nous avons $B \subset A$. D'où $A = B$ et δ injective.
   — Supposons δ injective et montrons f injective. Soit x_1 et x_2 deux éléments de E distincts. Nous avons donc $A_1 = \{x_1\} \neq \{x_2\} = A_2$, d'où par injectivité de δ, $f(A_1) \neq f(A_2)$. Or par définition d'une application, $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont obligatoirement des singletons $\{y_1\}$ et $\{y_2\}$, avec $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Ainsi, $f(x_1) \neq f(x_2)$ et f est injective.
   Autre méthode : Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$. Nous avons alors $\delta(A_1) = \delta(A_2)$, donc par injectivité de δ, $\{x_1\} = A_1 = A_2 = \{x_2\}$.
   — Supposons f injective et montrons ρ surjective. Soit $A \subset E$. Posons $B = f(A) \subset F$. Alors $\rho(B) = f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$. Or nous avons montré à l'exercice **??** que si f était injective alors $f^{-1}(f(A)) = A$. Nous avons donc bien trouvé un antécédent pour A dans $\mathscr{P}(F)$, et montré la surjectivité de ρ.
   — Supposons ρ surjective et montrons f injective. Soit x_1 et x_2 deux éléments de E et $A_1 = \{x_1\} \subset E$, $A_2 = \{x_2\} \subset E$. Par surjectivité de ρ, il existe $B_1 \subset F$ tel que $\rho(B_1) = f^{-1}(B_1) = A_1$. Puisque A_1 est un singleton, il ne peut être image réciproque que d'un seul élément. Donc B_1 est aussi un singleton, qui n'est autre que $\{f(x_1)\}$. De même, il existe $B_2 = \{f(x_2)\}$, singleton tel que $A_2 = f^{-1}(B_2)$. Supposons maintenant que $x_1 \neq x_2$, alors $A_1 \neq A_2$. Dans ce cas, $\rho(B_1) \neq \rho(B_2)$ et B_1, B_2 ne peuvent pas être égaux. Ainsi $f(x_1) \neq f(x_2)$, donc f est injective.
   Autre méthode : on commence de même, mais on suppose cette fois que $f(x_1) = f(x_2)$. Dans ce cas, $B_1 = B_2$, d'où $\rho(B_1) = \rho(B_2)$, c'est-à-dire $A_1 = A_2$ et finalement $x_1 = x_2$.
2.
   — Supposons f surjective et montrons δ surjective. Soit $B \subset F$. Si $B = \emptyset$, alors $A = \emptyset$ vérifie $f(A) = B$. Supposons B non vide, alors par surjectivité de f, $\forall y \in B, \exists x_y \in E,\ f(x_y) = y$. En notant $A = \{x_y \ / \ y \in B\}$, nous avons bien $f(A) = B$. D'où δ surjective.
   — Supposons δ surjective et montrons f surjective. Soit $y \in F$ et posons $B = \{y\} \subset F$, par surjectivité de δ, il existe $A \subset E$ tel que $f(A) = \delta(A) = B = \{y\}$. Il suffit alors de prendre n'importe quel $x \in A$ pour avoir l'existence de $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.
   — Supposons f surjective et montrons ρ injective. Soit B_1 et B_2 deux parties de F tels que $\rho(B_1) = \rho(B_2)$. Montrons que $B_1 = B_2$ par double inclusion. En supposant $B_1 \neq \emptyset$, soit $y \in B_1$, alors par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Nous avons alors $x \in f^{-1}(B_1)$, donc $x \in f^{-1}(B_2)$ ce qui veut dire que $y = f(x) \in B_2$. On a ainsi montré que $B_1 \subset B_2$. Si $B_1 = \emptyset$, alors $\rho(B_1) = \emptyset = \rho(B_2)$. Si $B_2 \neq \emptyset$, la surjectivité de f nous donne $\rho(B_2) \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire, donc $B_2 = \emptyset = B_1$. Par symétrie du problème, nous avons aussi $B_2 \subset B_1$ et donc $B_2 = B_1$. Ainsi ρ est injective.

— Supposons ρ injective et montrons f surjective. Soit $y \in F$. Puisque $\rho(\emptyset) = \emptyset$, nous avons par injectivité de ρ, $\rho(\{y\}) \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in \rho(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et f est surjective.