

Nombres complexes

TD

Proposition de correction

Exercice. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Montrer que $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D .

— Montrons qu'elle est injective : On résout $\frac{z-i}{z+i} = \frac{z'-i}{z'+i} \Leftrightarrow z-z' = z'-z \Leftrightarrow z = z'$.

— Montrons qu'elle est surjective : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Cherchons $x \in \mathbb{C}$ (et même $x \in P$), tel que $f(x) = z$:

$$\begin{aligned} f(x) = z &\Leftrightarrow \frac{x-i}{x+i} = z \Leftrightarrow x-i = zx+iz \\ &\Leftrightarrow x(1-z) = i(1+z) \Leftrightarrow x = i \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad z \neq 1 \text{ car } |z| < 1 \end{aligned}$$

Donc f est bien une bijection. En réalité nous avons montré que c'est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Reste donc à montrer que l'image de P est D . Si $\operatorname{Im}(z) > 0$, alors

$$\begin{aligned} |z-i|^2 &= (z-i)(\bar{z}+i) = |z|^2 + 1 + i(z-\bar{z}) = |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Im}(z) \\ &< |z|^2 + 1 \\ |z+i|^2 &= |z|^2 + 1 + 2\operatorname{Im}(z) \\ &> |z|^2 + 1 \end{aligned}$$

Donc on a

$$|f(z)|^2 = \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 < 1$$

On a en fait l'équivalence $\operatorname{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow |f(z)| < 1$. D'où $f(P) \subset D$. Réciproquement, si $z \in D$ (donc $|z| < 1$), alors par bijectivité de f , il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = z$. Et par l'équivalence précédente, nous avons $\operatorname{Im}(x) > 0$, donc $x \in P$ et $z = f(x) \in f(P)$. D'où $f(P) = D$.

Exercice. Résoudre dans \mathbb{C} :

1. $2ix - 3 = 1 - i$

2. $\begin{cases} x+2y = 1 \\ x-iy = 2i \end{cases}$

1. $x = -\frac{1}{2} - 2i$

2. $y = \frac{1-2i}{2+i} = -i$ et $x = 1 - 2y = 1 + 2i$

Exercice. Étant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on forme $Z = \frac{z+i}{z-2i}$.

- Déterminer l'ensemble (E_1) des nombres z tels que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble (E_2) des nombres z tels que Z soit imaginaire pur.
- Déterminer l'ensemble (E_3) des images des nombres z tels que Z ait $\frac{\pi}{2}$ pour argument.

1. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+2i) = (\bar{z}-i)(z-2i) \Leftrightarrow 3i\bar{z} + 3iz = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ (avec $z \neq 2i$).

2. $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+2i) = -(\bar{z}-i)(z-2i) \Leftrightarrow z\bar{z} - \operatorname{Im}(z) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$.
C'est donc le cercle de centre $(0; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{3}{2}$, privé du point $2i$.

3. Nous avons alors $Z \in i\mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(Z) > 0$. Donc z est sur le cercle précédent. De plus $Z = \frac{(z+i)(\bar{z}+2i)}{|z-2i|^2} = \frac{x^2+y^2-y-2+3ix}{|z-2i|^2}$. Donc sa partie imaginaire est strictement positive si et seulement si $x > 0$. L'ensemble est donc le cercle précédent restreint aux points d'abscisses strictement positives.

Exercice. Étant donné x et y réels, on considère les nombres complexes :

$$z_1 = x - 4 + i(y+5) \quad ; \quad z_2 = x + 4 + i(y-1) \quad ; \quad z = x + iy \text{ et son image } M(x, y) \text{ dans le plan}$$

- Pour quel point M a-t-on $z_1 = 3z_2$?
- Déterminer et représenter l'ensemble \mathcal{D} des points M tels que $z_1 - z_2$ soit réel.
- On note A le point d'affixe $-2i$. Montrer que $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $|z+2i| = 5$. En déduire l'ensemble \mathcal{C} des points M tels que $z_1 z_2$ soit imaginaire pur.

- $z_1 = 3z_2 \Leftrightarrow x-4+i(y+5) = 3(x+4)+3i(1-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 3(x+4) \\ y+5 = 3(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -16 \\ 4y = -2 \end{cases}$. La solution est donc $M = (-8; -\frac{1}{2})$.
- On a $z_1 - z_2 = -8 + i(2y+4)$. Donc $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si $2y+4 = 0$, c'est-à-dire $y = -2$. L'ensemble \mathcal{D} est la droite d'équation $y = -2$.
- La partie réelle de $z_1 z_2$ est $(x-4)(x+4) - (y+5)(1-y)$. Donc $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = 25$. L'ensemble est donc le cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice (Identité du parallélogramme). Montrer que pour z et z' complexes, on a $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. En déduire que dans un parallélogramme $ABCD$, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Il suffit de développer : $|z+z'|^2 = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$ et $|z-z'|^2 = z\bar{z} - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}'$. On en déduit le résultat.

Soit a, b, c, d les affixes des points. Puisque nous avons un parallélogramme, nous avons $\vec{AD} = \vec{BC}$ et $\vec{AB} = \vec{DC}$, d'où $d-a = c-b$ et $b-a = c-d$. En posant $z = d-a = c-b$ et $z' = b-a = c-d$, nous avons $z+z' = c-a$ et $z-z' = d-b$. D'où $|c-a|^2 + |d-b|^2 = |d-a|^2 + |c-b|^2 + |b-a|^2 + |c-d|^2$, c'est-à-dire $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice. Soit $(z; z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $zz' \neq -1$. Démontrer par deux méthodes que $Z = \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

1^{re} méthode : On démontre l'égalité au conjugué en utilisant les propriétés de la conjugaison :

$$\begin{aligned} \bar{Z} - Z &= \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{1 + \bar{z}\bar{z}'} - \frac{z + z'}{1 + zz'} = \frac{\bar{z} + z\bar{z}' + \bar{z}' - z - z' - z\bar{z}' - \bar{z}z'}{(1 + \bar{z}\bar{z}')(1 + zz')} \\ &= \frac{\bar{z} + z' |z|^2 + \bar{z}' + z |z'|^2 - z - z' - \bar{z}' |z|^2 - \bar{z} |z'|^2}{(1 + \bar{z}\bar{z}')(1 + zz')} = \frac{\bar{z} + z' + \bar{z}' + z - z - z' - \bar{z}' - \bar{z}}{(1 + \bar{z}\bar{z}')(1 + zz')} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\bar{Z} = Z$ et on en déduit $Z \in \mathbb{R}$.

2^{de} méthode : On utilise l'écriture exponentielle de z et z' : $\exists(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2, z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$. Par conséquent :

$$Z = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i\theta}e^{i\theta'}} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}})}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}})} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

Exercice. Démontrer par deux méthodes que :

$$\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, \quad Z = \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

1^{re} méthode : On démontre l'opposition au conjugué en utilisant les propriétés de la conjugaison :

$$Z + \bar{Z} = \frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{z\bar{z} - z + \bar{z} - 1 + z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{2|z|^2 - 2}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0 \Rightarrow \bar{Z} = -Z \Rightarrow Z \in i\mathbb{R}$$

2^{de} méthode : On utilise l'écriture exponentielle de z et $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$. Par conséquent :

$$Z = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -i \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \in i\mathbb{R}$$

Exercice. Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq b$. Démontrer par deux méthodes que :

$$(a \in \mathbb{U} \text{ ou } b \in \mathbb{U}) \Rightarrow \frac{a-b}{1-\bar{a}\bar{b}} \in \mathbb{U}$$

1^{re} méthode : On utilise purement les propriétés de la conjugaison.

Méthode 1-a : Supposons par exemple que $a \in \mathbb{U}$. Alors $\bar{a} = \frac{1}{a}$, donc :

$$1 - \bar{a}b = 1 - \frac{1}{a}b = \frac{a-b}{a} \neq 0 \Rightarrow \frac{a-b}{1-\bar{a}b} = a \in \mathbb{U}$$

Supposons maintenant que $b \in \mathbb{U}$. Alors :

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}\bar{b}} \right| = \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\overline{a-b}|}{|1-\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|1-\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|1-\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{\left| \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{a}} \right|} = |\bar{b}| = |b| = 1$$

Méthode 1-b : Notons Z le rapport considéré. On a :

$$Z\bar{Z} = \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \times \frac{\overline{a-b}}{1-\overline{\bar{a}b}} = \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{(1-\bar{a}b)(1-\bar{a}b)} = \frac{a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{b}}{1-\bar{a}b-\bar{a}b+a\bar{a}b\bar{b}} = \frac{|a|^2+|b|^2-a\bar{b}-\bar{a}b}{1+|a|^2|b|^2-a\bar{b}-\bar{a}b}$$

Par conséquent : $a \in \mathbb{U} \Rightarrow |a|^2 = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1 \Rightarrow |Z|^2 = 1 \Rightarrow Z \in \mathbb{U}$. Et on a la même conclusion si $b \in \mathbb{U}$.

2^{de} méthode : On utilise l'exponentielle complexe.

supposons que $a \in \mathbb{U}$. Alors : $\exists \theta \in \mathbb{R}, a = e^{i\theta}$. On obtient dans ces conditions :

$$\frac{a-b}{1-\bar{a}b} = \frac{e^{i\theta}-b}{1-e^{-i\theta}b} = e^{i\theta} \frac{1-e^{-i\theta}b}{1-e^{-i\theta}b} = e^{i\theta} = a \in \mathbb{U}$$

Supposons que $b \in \mathbb{U}$. Alors : $\exists \theta \in \mathbb{R}, b = e^{i\theta}$. Observons alors que :

$$\frac{\overline{a-b}}{1-\overline{\bar{a}b}} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-\bar{a}b} = \frac{\bar{a}-e^{-i\theta}}{1-\bar{a}e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \frac{\bar{a}e^{i\theta}-1}{1-\bar{a}e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)} \in \mathbb{U}$$

Il en résulte encore :

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|\overline{a-b}|}{|1-\overline{\bar{a}b}|} = \left| \frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Exercice. Soit $(a; b) \in \mathbb{U}^2$, avec $a \neq b$. Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

On démontre l'opposition au conjugué en utilisant les propriétés de la conjugaison :

$$\begin{aligned} \frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} + \overline{\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \right)} &= \frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} + \frac{\bar{z}+\bar{a}b\bar{z}-(\bar{a}+\bar{b})}{\bar{a}-\bar{b}} \\ &= \frac{\bar{a}z-\bar{b}z+a\bar{a}b\bar{z}-ab\bar{b}\bar{z}-a\bar{a}+\bar{a}b-\bar{a}b+b\bar{b}+a\bar{z}+a\bar{a}b\bar{z}-a\bar{a}-\bar{a}b-b\bar{z}-\bar{a}b\bar{b}z+\bar{a}b+b\bar{b}}{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})} \\ &= \frac{\bar{a}z-\bar{b}z+b\bar{z}-a\bar{z}-1+a\bar{b}-\bar{a}b+1+a\bar{z}+\bar{b}z-1-\bar{a}b-b\bar{z}-\bar{a}z+\bar{a}b+1}{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'opposition annoncée, et par conséquent le caractère imaginaire pur du rapport considéré.

Exercice. Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$. Déterminer le module et un argument de :

$$Z = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + 1}$$

On peut aussi écrire :

$$Z = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Par conséquent :

$$\theta \in]-\pi; 0[\Rightarrow |Z| = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow Z = 0$$

$$\theta \in]0; \pi[\Rightarrow |Z| = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Exercice. Soit $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le module et un argument de $z = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

$$z = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \quad \left(= -2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\left(\pi+\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \right)$$

Par conséquent :

$$\frac{\theta-\theta'}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\pmod{2\pi} \Rightarrow |z| = 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\theta+\theta'}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\frac{\theta - \theta'}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Rightarrow z = 0$$

$$\frac{\theta - \theta'}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\pmod{2\pi} \Rightarrow |z| = -2 \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \pi + \frac{\theta + \theta'}{2} \pmod{2\pi}$$

Exercice. Soit $z \in \mathbb{U}$ dont un argument est dans $]0; \frac{\pi}{3}[$. Déterminer le module et un argument de $Z = \frac{1+z^3}{z^2}$.

$\exists \theta \in]0; \frac{\pi}{3}[$, $z = e^{i\theta}$. Par conséquent :

$$Z = \frac{1 + e^{i3\theta}}{e^{i2\theta}} = e^{-i2\theta} + e^{i\theta} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{3\theta}{2}} + e^{i\frac{3\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

Or : $\theta \in]0; \frac{\pi}{3}[\Rightarrow \frac{3\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) > 0$. Donc $|Z| = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ et $\arg(Z) = -\frac{\theta}{2} \pmod{2\pi}$.

Exercice. On note $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $A = \alpha + \alpha^4$ et $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

- Justifier que A et B sont les solutions de l'équation $(E) : x^2 + x - 1 = 0$.
- Déterminer A en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
- En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Par application du cours (propriété 10.18) :

$$\sum_{k=0}^4 \alpha^k = 0 \Rightarrow A + B + 1 = 0 \Rightarrow A + B = -1$$

Par ailleurs : $AB = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha\alpha^5 + \alpha^2\alpha^5 = A + B = -1$ (compte tenu de $\alpha^5 = 1$). Donc A et B sont les solutions de l'équation $x^2 - (-1)x + (-1) = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E) .

2. Observons que :

$$\alpha^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{5} + 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \bar{\alpha}$$

Il en résulte immédiatement :

$$A = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

3. On en déduit de 1. et 2. que A est une solution positive de (E) (puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$). Or cette équation a pour solutions :

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

Par conséquent :

$$A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Exercice. On note $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $A = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $B = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

- Justifier que A et B sont conjugués et que $\text{Im}(A) > 0$.
- Calculer AB et $A + B$, puis en déduire les valeurs exactes respectives de :

$$x = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) y = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

1. On observe que :

$$\alpha^3 = e^{i\frac{6\pi}{7}} = e^{i\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right)} = e^{-i\frac{8\pi}{7}} = \overline{e^{i\frac{8\pi}{7}}} = \bar{\alpha}^4$$

$$\alpha^5 = e^{i\frac{10\pi}{7}} = e^{i\left(-\frac{4\pi}{7} + 2\pi\right)} = e^{-i\frac{4\pi}{7}} = \overline{e^{i\frac{4\pi}{7}}} = \bar{\alpha}^2$$

$$\alpha^6 = e^{i\frac{12\pi}{7}} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{7} + 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{7}} = \overline{e^{i\frac{2\pi}{7}}} = \bar{\alpha}$$

Par propriété de la conjugaison (conjugué d'une somme, conjugué d'une puissance), on en déduit : $B = \bar{A}$.

Observons que :

$$\text{Im}(A) = \text{Im}\left(e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Comme $\frac{4\pi}{7} \in]0; \pi[$, $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$. Par ailleurs, $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$. De plus :

$$0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$$

Donc $\text{Im}(A) > 0$.

2. Par le même argument et le même type de calcul qu'à l'exercice ??, on obtient $A + B = -1$, puis ;

$$\begin{aligned} AB &= \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{10} = \alpha^4 + \alpha^6 + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 \\ &= A + B + 3 = 2 \end{aligned}$$

On en déduit que A et B sont les solutions de l'équation $(E) : x^2 + x + 2 = 0$, laquelle a pour solutions conjuguées :

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

En tenant compte de $\text{Im}(A) > 0$, on obtient ainsi :

$$A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Il reste alors à observer que $x = \text{Re}(\alpha) + \text{Re}(\alpha^2) + \text{Re}(\alpha^4) = \text{Re}(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4) = \text{Re}(A)$ et que $y = \text{Im}(A)$:

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les sommes :

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

En déduire en particulier la limite :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

2. Calculer les sommes :

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

3. Calculer les sommes :

$$C_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{\cos^4(\theta)} \quad ; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{\cos^4(\theta)}$$

Dans chaque cas, on pose $E_n = C_n + iS_n$, de sorte que $C_n = \text{Re}(E_n)$ et $S_n = \text{Im}(E_n)$.

1. Si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, on a ici $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$. Pour tout $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} (e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$C_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad ; \quad S_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Enfin, dans le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{n}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

On peut alors aussi en déduire :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan(x)}{x}} = \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{2}{\pi}$$

Remarque : nous verrons dans le chapitre ?? « ?? » que l'on peut trouver ce résultat en écrivant directement :

$$L = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx$$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient ici en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k} = (e^{i\theta} + 1)^n \\ &= \left(e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})\right)^n = e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où résulte :

$$C_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad ; \quad S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

3. Commençons par observer que les sommes n'existent que si $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)} = \sum_{k=0}^n \frac{(e^{i\theta})^k}{\cos^k(\theta)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}\right)^k$$

Si $\theta = 0 \pmod{\pi}$, alors $E_n = n + 1$, donc $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$ (seul cas à distinguer car $\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \pmod{\pi}$).

Si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, alors :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1 - \left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}} = \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{\cos^{n+1}(\theta)}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}} = \frac{1}{\cos^n(\theta)} \times \frac{\cos^{n+1}(\theta) - e^{i(n+1)\theta}}{\cos(\theta) - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{\cos^n(\theta)} \times \frac{\cos^{n+1}(\theta) - \cos((n+1)\theta) - i \sin((n+1)\theta)}{-i \sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta) \cos^n(\theta)} + i \frac{\cos^{n+1}(\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta) \cos^n(\theta)} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$C_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta) \cos^n(\theta)} \quad ; \quad S_n = \frac{\cos^{n+1}(\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta) \cos^n(\theta)}$$

Exercice.

1. Exprimer en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$:

- a) $\cos(2\theta)$ b) $\sin(2\theta)$ c) $\cos(3\theta)$ d) $\sin(4\theta)$ e) $\sin(5\theta)$

2. Linéariser :

- a) $\cos^2(\theta)$ b) $\sin^2(\theta)$ c) $\cos^3(\theta)$ d) $\sin^4(\theta)$ e) $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$

1. a) $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ d) $2 \sin(2\theta) \cos(2\theta) = 4 \sin(\theta) \cos(\theta) (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
 b) $2 \sin(\theta) \cos(\theta)$
 c) $\cos(\theta) \cos(2\theta) - \sin(\theta) \sin(2\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)$ e) $\sin(\theta + 4\theta) = \sin(\theta) \cos(4\theta) + \sin(4\theta) \cos(\theta) = \sin(\theta) (5 - 20 \sin^2(\theta) + 16 \sin^4(\theta))$

2. a) $\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ c) $\frac{3 \cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4}$
 b) $\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ d) $\frac{3 - 4 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}$

e) Cette fois, le plus simple est d'utiliser les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) &= -\frac{1}{32} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\ &= -\frac{1}{32} (e^{5i\theta} + e^{-5i\theta} + e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - 2e^{i\theta} - 2e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{32} (2 \cos(5\theta) + 2 \cos(3\theta) - 4 \cos(\theta)) \\
&= \frac{2 \cos(\theta) - \cos(3\theta) - \cos(5\theta)}{16}
\end{aligned}$$

Exercice. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(5\theta) = \operatorname{Im}\left(e^{i5\theta}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^5\right)$$

Or d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta}\right)^5 &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cos^{5-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \\
&= \cos^5(\theta) + 5i \cos^4(\theta) \sin(\theta) - 10 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) - 10i \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + 5 \cos(\theta) \sin^4(\theta) + i \sin^5(\theta) \\
&= \left(\cos^5(\theta) - 10 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + 5 \cos(\theta) \sin^4(\theta)\right) + i \left(5 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - 10 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)\right)
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire :

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= 5 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - 10 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 5 \left(1 - \sin^2(\theta)\right)^2 \sin(\theta) - 10 \left(1 - \sin^2(\theta)\right) \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 5 \left(1 - 2 \sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)\right) \sin(\theta) - 10 \sin^3(\theta) + 11 \sin^5(\theta) \\
&= 16 \sin^5(\theta) - 20 \sin^3(\theta) + 5 \sin(\theta)
\end{aligned}$$

2. Appliquons la formule précédente au cas où $\theta = \frac{\pi}{5}$ et notons $x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On obtient alors :

$$\sin(\pi) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

C'est-à-dire aussi : $x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0$. Or, il est clair que $x \neq 0$. Donc x est solution de l'équation

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$$

Pour résoudre cette équation bicarrée, posons $Y = y^2$. Elle équivaut alors à : $\begin{cases} 16Y^2 - 20Y + 5 = 0 \\ Y^2 = Y \end{cases}$. C'est-à-dire aussi à $y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $y^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$, d'où quatre solutions à l'équation en y . Pour déterminer à laquelle correspond le réel x , il reste à observer que $\frac{\pi}{5} \in]0; \frac{\pi}{4}[\Rightarrow x \in]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[\Rightarrow x^2 \in]0; \frac{1}{2}[$. D'où une seule possibilité :

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice. Calculer les valeurs exactes respectives des intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4(x) dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

— Pour calculer I , on commence par linéariser la fonction à intégrer, au moyen d'une formule d'Euler, de la formule du binôme de Newton et de la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16} \left(e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{16} \left(\left(e^{i4x} + e^{-i4x}\right) - 4\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) + 6\right) = \frac{1}{16} (2 \cos(4x) - 4 \times 2 \cos(2x) + 6)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^4(x) = \frac{1}{8} (\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3)$$

Par conséquent :

$$I = \frac{1}{8} \int_0^\pi (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3) dx = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{1}{8} \sin(2x) + 3x \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}$$

— On applique la même méthode pour calculer J (attention à tout développer en exponentielles avant de revenir à une formulation trigonométrique !):

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{32i} (e^{ix} - e^{-ix})^3 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= -\frac{1}{32i} (e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}) (e^{i2x} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-i2x}) \\ &= -\frac{1}{32i} (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) (e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) \\ &= -\frac{1}{32i} (e^{i5x} + 2e^{i3x} + e^{ix} - 3e^{i3x} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} \\ &\quad + 6e^{-ix} + 3e^{-i3x} - e^{-ix} - 2e^{-i3x} - e^{-i5x}) \\ &= -\frac{1}{32i} ((e^{i5x} - e^{-i5x}) - (e^{i3x} - e^{-i3x}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{16} (-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)) dx \\ J &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{5} \cos(5x) - \frac{1}{3} \cos(3x) - 2\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ J &= \frac{1}{16} \left[0 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 2 \right) \right] \\ J &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Remarque 1. Nous verrons plus tard, au chapitre ?? « ?? », une méthode plus simple dans ce cas particulier.

Exercice. Déterminer dans chaque cas des réels A , ω et φ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$.

1. $f : t \mapsto \cos(2t) - \sin(2t)$
2. $f : t \mapsto -\sqrt{3} \cos(2t) + \sin(2t)$

1. Considérons le nombre complexe $z = 1 - i$. On a $|z| = \sqrt{2}$ et on obtient donc :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sqrt{2} \cos(2t) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin(2t) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(2t - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. On procède de la même manière qu'au ??, en considérant au préalable le nombre $z = -\sqrt{3} + 1i$:

$$z = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \times 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Ce qui permet d'en déduire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 2 \cos(2t) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2 \sin(2t) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

Exercice. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

Commençons par observer que $1+i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $1-i = \overline{1+i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = \frac{(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} - (\sqrt{2})^n e^{-in\frac{\pi}{4}}}{i} = 2^{\frac{n}{2}} \frac{e^{in\frac{\pi}{4}} - e^{-in\frac{\pi}{4}}}{i} = 2^{\frac{n}{2}} \frac{2i \sin(n\frac{\pi}{4})}{i} \\ = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

Exercice.

- En considérant de deux manières le rapport $Z = \frac{a}{b}$, où $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = 1+i$, calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
- On pose $z = (2\sqrt{3}+2) + i(2\sqrt{3}-2)$.
 - Déterminer les entiers naturels n tels que $z^n \in i\mathbb{R}$.
 - Déterminer les entiers naturels n tels que $z^n \in \mathbb{R}_-$.

1. Observons en premier lieu que $a = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que $b = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (voir exercice ??). D'où :

$$Z = \frac{a}{b} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Par ailleurs, on peut directement obtenir la forme algébrique de Z par :

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

L'unicité de la forme algébrique de Z permet d'en déduire par identification :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

D'où résulte finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Commençons par remarquer que $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2 + (2\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
En notant θ l'argument principal de z , on a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin(\theta) = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Par conséquent, $\theta = \frac{\pi}{12}$. D'où $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ce qui implique aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, z^n = (4\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{12}}$. On peut alors répondre aux deux questions posées :

a)

$$n \in \mathbb{N} \text{ et } z^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n\pi = 6\pi + 12k\pi \\ \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n = 6 + 12k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 6 + 12k$$

b)

$$n \in \mathbb{N} \text{ et } z^n \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n\frac{\pi}{12} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n\pi = 12\pi + 24k\pi \\ \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n = 12 + 24k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 12 + 24k$$

Exercice. On considère une suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\begin{cases} 0 < |z_0| < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n}{2-z_n} \end{cases}$$

- Démontrer que la suite (ρ_n) de terme général $\rho_n = |z_n|$ est strictement décroissante, minorée par 0 et majorée par 1.
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| \leq \frac{1}{(2-|z_0|)^n} |z_0|$$

3. Qu'en résulte-t-il pour la limite de la suite (z_n) ?

Indication. On dit qu'une suite complexe (z_n) converge si et seulement si les suites de termes généraux respectifs $\operatorname{Re}(z_n)$ et $\operatorname{Im}(z_n)$ convergent. Dans ce cas, on a : $\lim z_n = \lim \operatorname{Re}(z_n) + i \lim \operatorname{Im}(z_n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ la propriété « $0 < \rho_{n+1} < \rho_n < 1$ ». On a d'abord, en utilisant $0 < |z_0| < 1$:

$$0 < \rho_1 = \left| \frac{z_0}{2 - z_0} \right| = \frac{\rho_0}{|2 - z_0|} < \rho_0 < 1$$

La seconde inégalité stricte résulte de $0 \leq |\operatorname{Re}(z_0)| \leq |z_0|$, qui permet à son tour d'obtenir :

$$|z_0| < 1 \Rightarrow -1 < \operatorname{Re}(z_0) < 1 \Rightarrow 2 - \operatorname{Re}(z_0) = \operatorname{Re}(2 - z_0) > 1 \Rightarrow |2 - z_0| \geq |\operatorname{Re}(2 - z_0)| > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|2 - z_0|} < 1$$

Par conséquent, $P(0)$ est vraie.

Supposons maintenant que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors comme précédemment :

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} < 1 &\Rightarrow 2 - \operatorname{Re}(z_{n+1}) = \operatorname{Re}(2 - z_{n+1}) > 1 \Rightarrow |2 - z_{n+1}| \geq |\operatorname{Re}(2 - z_{n+1})| > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|2 - z_{n+1}|} < 1 \\ &\Rightarrow 0 < \rho_{n+2} = \left| \frac{z_{n+1}}{2 - z_{n+1}} \right| = \frac{\rho_{n+1}}{|2 - z_{n+1}|} < \rho_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie sur \mathbb{N} . Ce qui signifie exactement que (ρ_n) est strictement décroissante, minorée par 0 et majorée par 1.

2. D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < |z_0| < |z_n| < 1$. On a vu précédemment qu'il en résulte en particulier que $|2 - z_n| > 1$. Or, on peut aussi observer que d'après l'inégalité triangulaire :

$$2 = |(2 - z_n) + z_n| \leq |2 - z_n| + |z_n|$$

On a donc précisément : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|2 - z_n| \geq 2 - |z_n| > 2 - |z_0| > 1$.

Il en résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{|2 - z_n|} < \frac{1}{2 - |z_0|} < 1$$

On peut en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_{n+1}| = \left| \frac{z_n}{2 - z_n} \right| = \frac{1}{|2 - z_n|} |z_n| < \frac{1}{2 - |z_0|} |z_n|$$

Une preuve par récurrence immédiate permet d'en déduire (la vérité de la proposition pour $n = 0$ étant claire) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq \frac{1}{(2 - |z_0|)^n} |z_0|$$

3. Observons que :

$$0 < \frac{1}{2 - |z_0|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - |z_0|)^n} |z_0| = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$. Notons alors $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n| \leq |z_n|$$

On en déduit, à nouveau par le théorème des gendarmes, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

On peut finalement conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

Exercice. On note (E) l'ensemble des suites réelles (u_n) satisfaisant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

On admettra ici (voir l'exercice ?? pour la preuve d'un résultat similaire) que les suites de (E) sont les combinaisons linéaires de deux suites géométriques de (E) de raisons complexes distinctes. Démontrer alors que toutes les suites de (E) convergent vers 0.

Cherchons d'abord à quelle condition sur sa raison q une suite non nulle et géométrique (g_n) est dans (E) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = qg_n$ et $g_{n+2} = q^2g_n$. Par conséquent :

$$(g_n) \in (E) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^2g_n = \frac{1}{2}qg_n - \frac{1}{4}g_n$$

Puisque (g_n) n'est pas identiquement nulle, on en déduit que $4q^2 - 2q + 1 = 0$. Ce qui implique : $q = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

Il existe donc deux raisons possibles, et deux seulement :

$$q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Il en résulte que pour toute suite (u_n) de (E) :

$$\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n + \mu \left(\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^n$$

C'est-à-dire aussi :

$$\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2^n} (\lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \mu e^{-in\frac{\pi}{3}})$$

Or, l'inégalité triangulaire implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \mu e^{-in\frac{\pi}{3}} \right| \leq \left| \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \mu e^{-in\frac{\pi}{3}} \right| = |\lambda| + |\mu|$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n| \leq \frac{|\lambda| + |\mu|}{2^n}$$

On peut conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (comme à l'exercice ??).

Exercice. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$, d'inconnue z .

Commençons par chercher le module et l'argument principal θ de $Z = 3\sqrt{3} - 3i$. On a :

$$|Z| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Donc $Z = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Notons par ailleurs (E) l'équation à résoudre, $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. On obtient :

$$(E) \Leftrightarrow e^{a+ib} = 6e^{-i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow e^a e^{ib} = 6e^{-i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a &= 6 \\ b &= -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \ln(6) \\ b &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \ln(6) + i \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exercice. Résoudre d'une manière générale l'équation $e^z = Z$ (d'inconnue z , le nombre complexe $Z \neq 0$ étant fixé) en donnant la forme algébrique des éventuelles solutions.

On généralise la méthode utilisée dans l'exercice ??. Notons (E) l'équation à résoudre, $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, $\rho = |Z| > 0$ et $\theta = \arg(Z)$. On obtient :

$$(E) \Leftrightarrow e^{a+ib} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow e^a e^{ib} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a &= \rho \\ b &= \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \ln(\rho) \\ b &= \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exercice. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Posons $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$, d'où $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$.

Pour la seconde partie, nous utilisons la factorisation par l'angle moitié (sachant que $\rho = 1$) : $1-z = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi le module vaut 1 si et seulement si $2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6} \right\} \Rightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Les solutions sont donc $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On vérifie sur un dessin que c'est cohérent.

Exercice. Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants :

1. $a = -3 + 4i$.
2. $b = -21 - 20i$.
3. $c = -7 + 24i$.

Dans chacun des cas, nous noterons respectivement x et y les parties réelle et imaginaire d'une racine carrée z du nombre étudié (a , b , ou c).

1. Ici :

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 5 - x^2 \\ 2x^2 = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Donc les deux racines carrées de a sont $(1 + 2i)$ et $(-1 - 2i)$ (opposées).

2. Ici :

$$z^2 = b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2} \\ x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = -21 \\ xy = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 29 - x^2 \\ 2x^2 = 8 \\ xy = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 25 \\ x^2 = 4 \\ xy = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Donc les deux racines carrées de b sont $(2 - 5i)$ et $(-2 + 5i)$ (opposées).

3. Ici :

$$z^2 = c \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} \\ x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ 2x^2 = 18 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x^2 = 9 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Donc les deux racines carrées de a sont $(3 + 4i)$ et $(-3 - 4i)$ (opposées).

Exercice.

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z = -13$

c) $z = -3 + 4i$

e) $5 - 12i$

b) $z = -3 - 4i$

d) $1 + i\sqrt{3}$

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 + z + 1 = 0$

d) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0 \quad \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$

b) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

e) $z^3 - i = 6(z + i)$

c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

f) $z^{2n} - 2\cos(n\varphi)z^n + 1 = 0$ où $\varphi \in$

1. a) $\pm i\sqrt{13}$

b) $x = a + ib$ avec $x^2 = z = -3 - 4i$, donc $a^2 + b^2 = |x^2| = |-3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. D'où $a = \pm 1$ et $b = \pm 2$. Le produit étant négatif, nous avons $x = \pm(1 - 2i)$.

c) Idem : $x = 1 + 2i$.

d) $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $x = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

e) $x = \pm(3 - 2i)$.

2. a) $\Delta = -3$, donc $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ainsi $x = j$ ou $x = j^2 = \bar{j}$.

b) $\Delta = 4(2+i)^2 - 24 - 32i = 4(4+4i-1) - 24 - 32i = -12 - 16i = -4(3+4i)$. Nous connaissons une racine de $-3 - 4i$, donc $\delta = 2(1 - 2i)$. Et les solutions sont $z = 2 + i \pm (1 - 2i) = 3 - i$ ou $1 + 3i$.

c) $\Delta = -3 - 4i$. D'où $z = \frac{-(4i-3) \pm (1-2i)}{2i} = -1 - i$ ou $-3 - 2i$.

d) On pose $Z = z^2$. $\Delta = -75 - 100i = 25(-3 - 4i)$. Les solutions sont $Z = -2i$ ou $Z = 5 - 12i$. Les racines ont été calculées précédemment. Ainsi $z = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = \pm(3 - 2i)$.

e) On remarque d'abord que $z^3 - i = z^3 + i^3$ et est donc factorisable par $z + i$: $z^3 - i = (z + i)(z^2 - iz - 1)$, donc l'équation revient à $(z + i)(z^2 - iz - 1) = 6(z + i)$. Donc $z = -i$ est solution, ou alors $z^2 - iz - 7 = 0$. Le discriminant vaut $27 = (3\sqrt{3})^2$, donc $z = \frac{i \pm 3\sqrt{3}}{2}$.

f) On pose $Z = z^n$, alors $Z^2 - 2\cos(n\varphi)Z + 1 = 0$. $\Delta = -4\sin^2(n\varphi)$, donc $\delta = 2i\sin(n\varphi)$ et $Z = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi) = e^{\pm ni\varphi} = z^n$. Donc z est une racine n -ième de $e^{\pm ni\varphi}$, c'est-à-dire $z = e^{\pm i\varphi + \frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Exercice. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- $z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0.$
- $2iz^2 + (3+7i)z + (4+2i) = 0.$
- $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0.$
- $z^3 + (2i-11)z^2 + (25-19i)z - 8(1-3i) = 0.$

Indication. Cette équation possède une solution réelle.

5. $z^3 + 3z - 2i = 0$

1. Le discriminant est $\Delta = 5 + 12i$, dont le module est $|\Delta| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Notons δ une racine carrée de Δ , $x = \text{Re}(\delta)$ et $y = \text{Im}(\delta)$. On a alors :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ y^2 = 13 - x^2 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

En prenant par exemple $\delta = 3 + 2i$, on en déduit les solutions :

$$z_1 = \frac{-(1+4i) - (3+2i)}{2} = -2 - 3i \quad ; \quad z_2 = \frac{-(1+4i) + (3+2i)}{2} = 1 - i$$

2. Le discriminant est $\Delta = -24 + 10i$, dont le module est $|\Delta| = \sqrt{(-24)^2 + 10^2} = 26$. Notons δ une racine carrée de Δ , $x = \text{Re}(\delta)$ et $y = \text{Im}(\delta)$. On a alors :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ 2xy = 10 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 26 - x^2 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$$

En prenant par exemple $\delta = 1 + 5i$, on en déduit les solutions :

$$z_1 = \frac{-(3+7i) - (1+5i)}{4i} = -3 + i \quad ; \quad z_2 = \frac{-(3+7i) + (1+5i)}{4i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

3. Le conjugué dans l'équation ne nous permet pas de résoudre avec la même méthode que précédemment, nous allons passer par les parties réelle et imaginaire. Notons $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0 &\Leftrightarrow i(a+ib)^2 - 2(a-ib) + 2 - i = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-2a-2ab) + i(a^2 - b^2 + 2b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-a-ab) = 0 \\ a^2 - b^2 + 2b - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+ab-1 = 0 \\ a^2 - (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(b+1) - 1 = 0 \\ (a-b+1)(a+b-1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(b+1) - 1 = 0 \\ a-b+1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a(b+1) - 1 = 0 \\ a+b-1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(b+1) - 1 = 0 \\ a = b-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (1-b)(b+1) - 1 = 0 \\ a = 1-b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 2 \\ a = b-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = 0 \\ a = 1-b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ a = \sqrt{2}-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2}-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation a trois solutions distinctes : $1, (\sqrt{2}-1) + i\sqrt{2}$ et $(-\sqrt{2}-1) - i\sqrt{2}$.

4. L'équation étant de degré 3 et n'ayant pas à notre disposition de méthode systématique pour résoudre ce type d'équation, nous devons d'abord chercher à factoriser le polynôme en un produit d'un polynôme de degré 1 et de degré 2. Cherchons d'abord, en suivant l'indication, un réel solution de l'équation :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \text{ et } z^3 + (2i-11)z^2 + (25-19i)z - 8(1-3i) &= 0 \\ z \in \mathbb{R} \text{ et } (z^3 - 11z^2 + 25z - 8) + i(2z^2 - 19z + 24) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - 11z^2 + 25z - 8 = 0 \\ 2z^2 - 19z + 24 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La seconde équation a pour discriminant $\Delta = 169 = 13^2$; on en déduit qu'elle admet $\frac{3}{2}$ et 8 pour solutions. De ces deux nombres, seul 8 est solution de la première équation. Donc l'équation initiale admet 8 pour unique solution réelle.

Il en résulte aussi que le premier membre de cette équation est un polynôme en z de degré 3 factorisable par $(z-8)$, c'est-à-dire :

$$\exists (a;b;c) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (2i-11)z^2 + (25-19i)z - 8(1-3i) = (z-8)(az^2 + bz + c)$$

En identifiant les coefficients des monômes de même degré, on en déduit après développement du second membre :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 8a = 2i - 11 \\ c - 8b = 25 - 19i \\ -8c = -8(1 - 3i) \end{cases}$$

On en déduit immédiatement $a = 1$, $b = -3 + 2i$ et $c = 1 - 3i$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} z^3 + (2i - 11)z^2 + (25 - 19i)z - 8(1 - 3i) &= 0 \Leftrightarrow (z - 8) \left(z^2 + (-3 + 2i)z + (1 - 3i) \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 8 \text{ ou } z^2 + (-3 + 2i)z + (1 - 3i) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré ainsi obtenue est $\Delta = 1$. On en déduit qu'elle a pour solutions :

$$\frac{-(-3 + 2i) - \sqrt{1}}{2} = 1 - i \text{ et } \frac{-(-3 + 2i) + \sqrt{1}}{2} = 2 - i$$

Conclusions : l'équation initiale admet exactement trois solutions, qui sont 8, $1 - i$ et $2 - i$.

5. L'équation étant de degré 3 et n'ayant pas à notre disposition de méthode systématique pour résoudre ce type d'équation, nous devons d'abord chercher à factoriser le polynôme en un produit d'un polynôme de degré 1 et de degré 2. Commençons par observer que l'équation $z^3 + 3z - 2i = 0$ admet i pour solution évidente. Ceci permet ensuite de factoriser le polynôme du premier membre :

$$\exists (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, \forall z \in \mathbb{C}, z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

En identifiant les coefficients des monômes de même degré on en déduit après développement du second membre :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 0 \\ c - ib = 3 \\ -ic = -2i \end{cases}$$

D'où résulte immédiatement : $a = 1$, $b = i$ et $c = 2$. Ainsi :

$$z^3 + 3z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + iz + 2) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 + iz + 2 = 0$$

L'équation du second degré obtenue a pour discriminant $\Delta = -9$; ses solutions sont par conséquent :

$$\frac{-i - i\sqrt{9}}{2} = -2i \text{ et } \frac{-i + i\sqrt{9}}{2} = i$$

Conclusion : l'équation initiale admet exactement deux solutions distinctes, qui sont i et $-2i$.

Exercice.

- Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On note (E) l'équation $a \cos(x) + b \sin(x) = c$, d'inconnue réelle x . On pose $z = e^{ix}$. Démontrer que $(E) \Leftrightarrow (a - ib)z^2 - 2cz + (a + ib) = 0$.
- Résoudre (E) .
- Résoudre par deux méthodes l'équation (E) : $-\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = \sqrt{2}$.

- Observons que dans la mesure où $z \in \mathbb{U} \Rightarrow z \neq 0$:

$$\begin{aligned} (a - ib)z^2 - 2cz + (a + ib) = 0 &\Leftrightarrow (a - ib)z - 2c + \frac{a + ib}{z} = 0 \Leftrightarrow (a - ib)e^{ix} + \overline{(a - ib)e^{ix}} - 2c = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re} \left((a - ib)e^{ix} \right) - 2c = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left((a - ib)e^{ix} \right) = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, on a aussi } \operatorname{Re} \left((a - ib)e^{ix} \right) &= \operatorname{Re} \left((a - i)(\cos(x) + i \sin(x)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left((a \cos(x) + b \sin(x)) + i(a \sin(x) - b \cos(x)) \right) = a \cos(x) + b \sin(x) \end{aligned}$$

On peut bien en conclure que $(E) \Leftrightarrow (a - ib)z^2 - 2cz + (a + ib) = 0$.

- Résolvons maintenant cette équation. Le discriminant est $\Delta = 4c^2 - 4(a + ib)(a - ib) = 4(c^2 - (a^2 + b^2))$.

1^{er} cas : $c^2 - (a^2 + b^2) > 0$. Alors

$$(E) \Leftrightarrow z = e^{ix} = \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}}{a - ib} \text{ ou } z = e^{ix} = \frac{c + \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}}{a - ib}$$

Or, ces identités sont toutes deux impossibles car il est nécessaire pour les solutions d'être de module 1. Montrons par

l'absurde que ce n'est pas le cas. Supposons par exemple que $\left|c - \sqrt{x^2 - (a^2 + b^2)}\right| = |a - ib|$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \left|c - \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}\right|^2 - |a - ib|^2 = c^2 - 2c\sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} + (c^2 - (a^2 + b^2)) - (a^2 + b^2) \\ &= 2 \left[(c^2 - (a^2 + b^2)) - c\sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} \right] = 2\sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} \left[\sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} - c \right] \end{aligned}$$

Donc : $c^2 - (a^2 + b^2) \neq 0$ (hypothèse de départ) $\Rightarrow \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} = c \Rightarrow c^2 - (a^2 + b^2) = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$. On a alors : $(E) \Leftrightarrow cz = 0$. Comme on a aussi $c^2 - (a^2 + b^2) \neq 0 \Rightarrow c^2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$, on obtient $z = 0$, ce qui contredit $z \in \mathbb{U}$. Par conséquent : $\left|c - \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}\right| \neq |a - ib|$ et donc :

$$\left| \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}}{a - ib} \right| = \frac{\left|c - \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)}\right|}{|a - ib|} \neq 1$$

On montre de même que l'autre rapport *a priori* solution de (E) ne peut en fait pas l'être car il n'est pas dans \mathbb{U} . Conclusion : Si $c^2 - (a^2 + b^2) > 0$, alors (E) n'a pas de solution.

2^e cas : $c^2 - (a^2 + b^2) = 0$. Alors :

$$(E) \Leftrightarrow z = e^{ix} = \frac{c}{a - i} = \frac{ac}{a^2 + b^2} + i \frac{bc}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow e^{ix} = \frac{ac}{c^2} + i \frac{bc}{c^2} = \frac{a}{c} + i \frac{b}{c} \Leftrightarrow x = \arg \left(\frac{a}{c} + i \frac{b}{c} \right)$$

Car $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left| \frac{a}{c} + i \frac{b}{c} \right| = 1$.

3^e cas : $c^2 - (a^2 + b^2) < 0$. Alors

$$(E) \Leftrightarrow z = e^{ix} = \frac{c - i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}}{a - ib} \text{ ou } z = e^{ix} = \frac{c + i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}}{a - ib}$$

Or, par exemple :

$$\left|c - i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}\right|^2 - |a - ib|^2 = c^2 + ((a^2 + b^2) - c^2) - (a^2 + b^2) = 0$$

Par conséquent :

$$\left| \frac{c - i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}}{a - ib} \right| = 1$$

De même, l'autre rapport *a priori* solution de (E) est de module 1. On peut conclure que dans ce 3^e cas :

$$(E) \Leftrightarrow x = \arg \left(\frac{c - i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}}{a - ib} \right) \text{ ou } x = \arg \left(\frac{c + i\sqrt{(a^2 + b^2) - c^2}}{a - ib} \right)$$

3. **1^{re} méthode :** On suit celle exposée au 2. Ici, $a = -1$, $b = \sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2}$. Avec $z = e^{ix}$, on obtient donc :

$$(E) \Leftrightarrow (-1 - i\sqrt{3})z^2 - 2\sqrt{2}z + (-1 + i\sqrt{3}) = 0$$

Le discriminant associé est $\Delta = 4(2 - 1 - 3) = -8$. On en déduit :

$$\begin{cases} z = e^{ix} = \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ z = e^{ix} = \frac{2\sqrt{2} + i\sqrt{8}}{2(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{11\pi}{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi} \\ x = \frac{11\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

2^e méthode : On peut écrire :

$$\begin{aligned} -\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{-\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ x - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{12} \pmod{2\pi} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$?
2. On considère dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.
1. En posant $z = x + iy$ et en calculant les modules au carrés, nous obtenons : $(1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2$, en développant et simplifiant, nous obtenons $y = 0$ et x quelconques. Donc les solutions sont les réels.
2. Nous avons $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$, donc les solutions vérifient $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$, ce qui est équivalent, puisque les modules sont des réels positifs, à $|1 + iz| = |1 - iz|$. Donc les solutions sont forcément dans \mathbb{R} (mais par forcément tous les réels).

Exercice. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^4 - 2z^2 \cos(\theta) + 1 = 0$.
2. En déduire une factorisation en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels du polynôme : $f(x) = x^4 - 2x^2 \cos(\theta) + 1$

1. Commençons par remarquer que $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} P(Z) = 0 \\ z^2 = Z \end{cases}$ où $P(Z) = Z^2 - 2Z \cos(\theta) + 1$.

Le discriminant de P est $\Delta = (-2 \cos(\theta))^2 - 4 = -4(1 - \cos^2(\theta)) = -4 \sin^2(\theta)$. Supposons que $\sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire que $\theta = 0 \pmod{\pi}$. On a alors :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Z = -\frac{-2 \cos(\theta)}{2} \\ z^2 = Z \Leftrightarrow z^2 = \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \text{ si } \theta = 0 \pmod{2\pi} \\ z^2 = -1 \text{ si } \theta = \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s \in \{-1; 1\} & \text{si } \theta = 0 \pmod{2\pi} \\ z \in \{-i; i\} & \text{si } \theta = \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\sin(\theta) \neq 0$, c'est-à-dire que $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. Notons α un argument de z . On a alors :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \frac{2 \cos(\theta) \pm i \sqrt{4 \sin^2(\theta)}}{2} \\ z^2 = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta) \\ z^2 = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = e^{i\theta} \\ \text{ou} \\ z^2 = e^{-i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i2\alpha} = e^{i\theta} \\ \text{ou} \\ e^{i2\alpha} = e^{-i\theta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \theta \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ 2\alpha = -\theta \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \\ \text{ou} \\ \alpha = -\frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm e^{i\frac{\theta}{2}} \\ \text{ou} \\ z = \pm e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

On en déduit que dans tous les cas, la solution de (E) est $\left\{e^{i\frac{\theta}{2}}; -e^{i\frac{\theta}{2}}; e^{-i\frac{\theta}{2}}; -e^{-i\frac{\theta}{2}}\right\}$, réduite à deux nombres distincts (comptés alors deux fois) dans les cas où $\theta = 0 \pmod{\pi}$, et comportant quatre solutions distinctes sinon.

2. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= (x - e^{i\frac{\theta}{2}})(x - e^{-i\frac{\theta}{2}})(x + e^{i\frac{\theta}{2}})(x + e^{-i\frac{\theta}{2}}) \\ &= (x^2 - (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})x + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}})(x^2 + (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})x + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}) \\ &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\theta}{2}})x + 1)(x^2 + 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\theta}{2}})x + 1) \\ &= \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x + 1\right)\left(x^2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x + 1\right) \end{aligned}$$

Exercice.

1. Déterminer les formes trigonométriques et algébriques des racines cubiques de $Z = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

1. Commençons par chercher une forme exponentielle de Z . On a : $|Z| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$. Donc

$$Z = 8 \left(\frac{-4\sqrt{2}}{8} + i \frac{4\sqrt{2}}{8} \right) = 8 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 8 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Soit z une racine cubique de Z . Notons $\rho = |z|$ et θ un argument de z . On a ainsi : $z = \rho e^{i\theta}$. D'où :

$$z^3 = Z \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

On en déduit que les trois racines cubiques de Z sont, sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ z_2 &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2 \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right) \end{aligned}$$

$$z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{5\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

Cherchons maintenant la forme algébrique de ces racines cubiques. Il est immédiat que $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, mais comment obtenir les deux autres ? Deux méthodes sont envisageables ?

1^{re} méthode : Notons $(a + ib)$ la forme algébrique de l'une de ces racines cubiques. On a :

$$(a + ib)^3 = Z \Leftrightarrow (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -4\sqrt{2} \\ 3a^2b - b^3 = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

En tenant aussi compte de $|a + ib|^3 = |Z| = 8$, on obtient :

$$(a + ib)^3 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -4\sqrt{2} \\ 3a^2b - b^3 = 4\sqrt{2} \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a(4 - a^2) = -4\sqrt{2} \\ b(3a^2 - b^2) = 4\sqrt{2} \\ b^2 = 4 - a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a + \sqrt{2} = 0 \\ b(3a^2 - b^2) = 4\sqrt{2} \\ b^2 = 4 - a^2 \end{cases}$$

Or, on a vu avec z_1 que $\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $a^3 - 3a + \sqrt{2} = 0$, dont le premier membre est donc un polynôme en a factorisable par $(a - \sqrt{2})$, sous la forme : $a^3 - 3a + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})(a^2 + \lambda a + \mu)$. On trouve $\lambda = \sqrt{2}$ et $\mu = -1$ par identification des coefficients des monômes de même degré (après développement). Par conséquent : $a^3 - 3a + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (a - \sqrt{2})(a^2 + \sqrt{2}a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ ou $a^2 + \sqrt{2}a - 1 = 0$.

Le discriminant associé à l'équation $a^2 + \sqrt{2}a - 1 = 0$ est $\Delta = 6$; elle a donc pour solutions :

$$a_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} ; \quad a_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

En revenant maintenant au système de trois équations obtenu plus haut, on en déduit :

$$a = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 4 - \left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3} \\ b = \frac{4\sqrt{2}}{3\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)^2 - (2 - \sqrt{3})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{4\sqrt{2}}{3(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

On montre de même que :

$$a = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

En tenant compte de $\frac{11\pi}{12} \in]\frac{\pi}{2}; \pi[\Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) < 0$ et de $-\frac{5\pi}{12} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\Rightarrow \operatorname{Re}(z_3) > 0$, on peut alors conclure que sous forme algébrique, les trois racines cubiques de Z sont :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} ; \quad z_2 = \left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) ; \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$$

2^{de} méthode : (beaucoup plus simple, mais nécessite une bonne compréhension du cours!). On va utiliser le fait que z_1 étant une racine cubique connue de Z , on peut en déduire les deux autres au moyen d'une racine cubique de 1 distincte de 1. Plus précisément, les trois racines cubiques de 1 sont, hormis 1, les nombres

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = \bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit alors immédiatement que les racines cubiques de Z distinctes de z_1 sont effectivement ;

$$z_2 = jz_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_3 = j^2z_1 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$$

2. En confrontant les formes algébrique et trigonométrique de z_2 , on en déduit enfin en particulier que :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} ; \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice. Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$. On donnera la forme algébrique des solutions.

1^{re} méthode : Notons z une racine quatrième de $(-7-24i)$, $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. On a en utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} z^4 = -7 - 24i &\Leftrightarrow (a+ib)^4 = -7 - 24i \Leftrightarrow a^4 + 4a^3ib + 6a^2i^2b^2 + 4ai^3b^3 + i^4b^4 = -7 - 24i \\ &\Leftrightarrow (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + i(4a^3b - 4ab^3) = -7 - 24i \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = -7 \\ 4a^3b - 4ab^3 = -24 \end{cases} \end{aligned}$$

En tenant par ailleurs compte de $|z|^4 = |-7-24i| = \sqrt{49+576} = 25$, on en déduit :

$$\begin{aligned} z^4 = -7 - 24i &\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)^2 - 8a^2b^2 = -7 \\ ab(a^2 - b^2) = -6 \\ (a^2 + b^2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 8a^2b^2 = -7 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab(a^2 - b^2) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab(a^2 - b^2) = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \text{ et } b^2 \text{ solutions de l'équation } x^2 - 5x + 4 = \\ ab(a^2 - b^2) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in \{1; 4\} \\ b^2 \in \{1; 4\} \\ ab(a^2 - b^2) = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z \in \{1 + 2i; -1 - 2i; 2 - i; -2 + i\} \end{aligned}$$

Remarque : il est intéressant d'observer en confrontant les exercices ?? et ?? qu'il est *dans le principe même* (beaucoup) plus facile d'extraire une racine quatrième qu'une racine cubique.

2^e méthode : On détermine d'abord les deux racines carrées de $(-7-24i)$. On trouve que ce sont $(3-4i)$ et $(-3+4i)$. On détermine ensuite les racines carrées de ces deux derniers nombres et on retrouve bien sûr comme résultats les quatre nombres déterminés par la première méthode.

3^e méthode : On applique la seconde méthode de l'exercice ?? : on détermine une racine quatrième (en utilisant la deuxième méthode précédente par exemple), puis on multiplie cette racine par $1, -1, i$ et $-i$ (les quatre racines cubiques de 1).

Exercice. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = -119 + 120i$. On donnera la forme algébrique de solutions.

En appliquant exactement l'une des trois méthodes utilisées au ??, on trouve les quatre racines quatrièmes suivantes :

$$2 - 3i \quad ; \quad -2 + 3i \quad ; \quad 3 + 2i \quad ; \quad -3 - 2i$$

Exercice. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$
- $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$

1. Notons (E) l'équation. On remarque que c'est une équation « bicarrée », posons alors $Z = z^2$. On obtient ainsi :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0 \\ z^2 = Z \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation en Z obtenue est $\Delta = -75 - 100i$. Cherchons-en une racine carrée δ sous la forme algébrique $a + ib$

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -75 \\ 2ab = -100 \\ a^2 + b^2 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 50 \\ b^2 = 125 - a^2 \\ ab = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 5 \\ b = \pm 10 \\ ab = -50 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut par exemple prendre $\delta = 5 - 10i$. On en déduit :

$$z^2 = \frac{(5 - 14i) - (5 - 10i)}{2} = -2i \text{ ou } z^2 = \frac{(5 - 14i) + (5 - 10i)}{2} = 5 - 12i$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les racines carrées de $(-2i)$ (facile, de tête : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 - i$ et $-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -1 + i$) et de $(5 - 12i)$ (par la méthode précédente). Ces racines carrées sont les solutions de (E) . On en déduit :

$$(E) \Leftrightarrow z \in \{-1 + i; 1 - i; 3 - 2i; -3 + 2i\}$$

2. Notons (E) l'équation. Tout développer pour la résoudre pose plus de problèmes que cela n'en résout, puisqu'on obtient une équation de degré 4 ne correspondant pas à l'un des rares types de cas particuliers qu'on sait résoudre.

Une méthode plus adéquate consiste à utiliser la possibilité de factoriser directement le premier membre et d'obtenir ainsi un produit de deux polynôme du second degré (on utilise pour cela : $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a - ib)(a + ib)$) :

$$(E) \Leftrightarrow (3z^2 + z + 1)^2 - i^2(z^2 + 2z + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3z^2 + z + 1)^2 - (i(z^2 + 2z + 2))^2 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[(3z^2 + z + 1) - i(z^2 + 2z + 2) \right] \left[(3z^2 + z + 1) + i(z^2 + 2z + 2) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[(3-i)z^2 + (1-2i)z + (1-2i) \right] \left[(3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-i)z^2 + (1-2i)z + (1-2i) = 0 \text{ ou } (3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant associé à la première équation est $\Delta_1 = -7 + 24i$. Notons δ_1 l'une de ses racines carrées. En reprenant le calcul effectué au ?? sur $\overline{\Delta_1}$ et en utilisant le fait que $\delta_1^2 = \Delta_1 \Leftrightarrow \overline{\delta_1}^2 = \overline{\Delta_1}$, on obtient par exemple $\delta_1 = 3 + 4i$. Il en résulte que les deux solutions de la première équation sont :

$$\begin{aligned} \frac{-(1-2i) - (3+4i)}{2(3-i)} &= \frac{-4-2i}{2(3-i)} = -\frac{(2+i)(3+i)}{3^2+1^2} = -\frac{5+5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{-(1-2i) + (3+4i)}{2(3-i)} &= \frac{2+6i}{2(3-i)} = \frac{(1+3i)(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{10i}{10} = i \end{aligned}$$

(Nous aurions pu voir que i était racine évidente et factoriser par $(z-i)$).

De même, le discriminant associé à la seconde équation est $\Delta_2 = -7 - 24i$, et on en déduit que l'une des racines carrées est $\delta_2 = (1+2i)^2 = -3+4i$, puis que les solutions de cette équation sont :

$$\begin{aligned} \frac{-(1+2i) - (-3+4i)}{2(3+i)} &= \frac{-2-6i}{2(3+i)} = -\frac{(1-3i)(3-i)}{3^2+1^2} = -\frac{10i}{10} = -i \\ \frac{-(1+2i) + (-3+4i)}{2(3+i)} &= \frac{-4+2i}{2(3+i)} = \frac{(-2+i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

(Nous aurions pu voir que $-i$ était racine évidente et factoriser par $(z+i)$, et donc finalement factoriser depuis le début par (z^2+1) et obtenir un simple polynôme réel de degré 2).

Les quatre nombres ainsi déterminés sont les quatre solutions de l'équation (E).

Exercice. 1. Calculer les racines cubiques de $\frac{-1+i}{4}$ et montrer que l'une d'elles a une puissance quatrième réelle.

2. Calculer les racines 5^{es} de -1 .

3. Déterminer les racines sixièmes de $Z = -\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$.

4. Calculer les racines 8^{es} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

5. Résoudre l'équation $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$.

1. $z = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc une racine cubique, sachant que $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}$, est $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les autres racines sont $z_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_2 = z_0 e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$. On vérifie que $z_0^4 = \frac{1}{4} e^{i\pi} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.

2. $-1 = e^{i\pi}$, donc $z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_k = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}(1+2k)}$.

3. Commençons par déterminer une forme exponentielle de Z :

$$Z = \frac{-4}{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Soit z une racine sixième de Z . Notons $\rho = |z|$ et θ un argument de z . On a ainsi : $z = \rho e^{i\theta}$. D'où :

$$z^6 = Z \Leftrightarrow \rho^6 e^{i6\theta} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 2 \\ 6\theta = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{9} \pmod{\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Les six racines sixièmes de Z sont donc :

$$\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{9}} ; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{4\pi}{9}} ; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi}{9}} ; \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{2\pi}{9}} ; \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{5\pi}{9}} ; \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{8\pi}{9}}$$

4. $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Donc $z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{36}}$ et $z_k = z_0 e^{i\frac{k\pi}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{36}(5+12k)}$.

5. En écrivant $z = \rho e^{i\theta}$, l'équation devient $\rho^7 e^{-7i\theta} = \frac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta}$. En égalisant les modules, nous avons $\rho^9 = 1$, donc $\rho = 1$ (nous sommes dans les réels positifs) et en égalisant les arguments, nous avons $-7\theta = -2\theta \pmod{2\pi} \Leftrightarrow 5\theta = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta = 0 \pmod{\frac{2\pi}{5}}$. Donc $z = e^{2ik\frac{\pi}{5}}$ avec $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$.

Exercice.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions.

2. On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- a) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.
 - b) Vérifier que $u + u^4 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $u^2 + u^3 = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
 - c) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ puis calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
1. Ce sont les racines 5^{es} de l'unité. Les solutions forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.
 2. a) C'est une formule de cours (u^k sont les racines cinquièmes de l'unité).
b) C'est du calcul avec la formule d'Euler.
 - c) Nous avons $4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 4 \left(\frac{u+u^4}{2}\right)^2 + (u+u^4) - 1 = u^2 + u^8 + 2u^5 + u + u^4 - 1 = u^2 + u^3 + 2 + u + u^4 - 1 = 0$. De même avec $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ainsi ces deux cosinus valent $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Le premier angle étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif, le second est négatif. D'où $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice. Le but de l'exercice est de déterminer les nombres complexes z tels que

$$(E) : \left| z + \frac{1}{z} \right| = 2$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $P_y(X) = X^2 + 2(y^2 - 1)X + y^4 - 6y^2 + 1$. Déterminer les racines de P_y .
2. En déduire la factorisation de $P_y(X)$ en produit de deux polynômes du premier degré en X .
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $P_y(x^2) = 0$ avec $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$).
4. Représenter géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie l'équation (E).

1. $\Delta = 4(y^2 - 1)^2 - 4(y^4 - 6y^2 + 1) = 16y^2$, donc $X = -y^2 + 1 \pm 2y$.
2. D'où $P_y(X) = (X + y^2 + 2y - 1)(X + y^2 - 2y - 1)$.
3. Posons $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \left| z^2 + 1 \right| = 2|z| \Leftrightarrow \left| z^2 + 1 \right|^2 = 4|z|^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 = 4(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^4 + y^4 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 4x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2(y^2 - 1) + y^4 + 1 - 6y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow P_y(x^2) = 0 \end{aligned}$$

4. Il suffit de tracer les courbes $x^2 = 1 - y^2 + 2y$ et $x^2 = 1 - y^2 - 2y$ (attention à l'intervalle de définition en passant à la racine carrée). Ou alors, on remarque que $x^2 + y^2 - 2y - 1 = x^2 + (y - 1)^2 - 2$, donc la première courbe est le cercle de centre $(0; 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. De même, le second est le cercle de centre $(0; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, exprimer la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité.

On sait que $\mathbb{U}_n = \{\omega^k \mid k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$, où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$. On a donc d'une part :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$$

D'autre part :

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}(0+1+2+\dots+(n-1))} = e^{i\frac{2\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}} = e^{i(n-1)\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} = (-1)^{n+1}$$

Exercice. Soit $n \geq 3$ et $\omega_k = \omega_1^k$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ les racines n es de l'unité.

1. Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^p$$

2. Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

1. Nous reconnaissons la somme d'une suite géométrique :

$$S_p = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_1^i)^p = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_1^p)^i = \frac{1 - (\omega_1^p)^n}{1 - \omega_1^p} = 0$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \omega_k} &= \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{n}} (e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}})} = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} - i \right) \\ &= \frac{i}{2 \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or, sachant que $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \stackrel{l=n-k}{=} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\tan\left(\pi - \frac{l\pi}{n}\right)} = - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\tan\left(\frac{l\pi}{n}\right)}$$

Donc cette somme est nulle. Il reste donc :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \frac{n-1}{2}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Calculer :

$$S = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$$

On sait que $\mathbb{U}_n = \{\omega^k / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$, où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k\pi}{n}} (e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k\pi}{n}}| \left| 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité se justifie par le fait que :

$$k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \Rightarrow 0 < \frac{k\pi}{n} < \pi \Rightarrow \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$$

Le calcul final est alors celui déjà effectué dans la première question de l'exercice ??; on en conclut :

$$S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Résoudre l'équation (E) : $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Remarquons en premier lieu que i n'est pas solution de (E) car $\forall n \in \mathbb{N}, (2i)^n \neq 0$. Par conséquent :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right) \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = \omega^k$$

où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Si $k=0$, $\omega^k = 1$, donc

$$\frac{z+i}{z-i} = \omega^k \Leftrightarrow z+i = z-i \Leftrightarrow 2i = 0$$

C'est absurde. On en déduit :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, z+i = \omega^k(z-i) \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, (1-\omega^k)z = -i(1+\omega^k) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, z = -i \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = -i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que la fonction dite « cotangente » et notée \cotan , définie par le rapport du cosinus au sinus, est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \pi[$ auquel appartiennent les $\frac{k\pi}{n}$; en effet :

$$\forall x \in]0; \pi[, \cotan'(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$$

On en déduit que l'équation (E) admet exactement $(n-1)$ solutions distinctes :

$$(E) \Leftrightarrow z \in \left\{ \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \right\}$$

Remarque : c'est cohérent avec le fait que (E) est de degré $(n-1)$, malgré les apparences initiales (ce qui s'établit facilement au moyen de l'application de la formule du binôme aux deux membres de l'équation initiale).

Exercice. Soit $a \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note z_1, z_2, \dots, z_n les racines n -ièmes de a . Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note aussi M_k le point du plan complexe d'affixe $(1+z_k)^n$.

Démontrer que les points M_k sont alignés.

Comme $a \in \mathbb{U}$, il existe un réel θ tel que $a = e^{i\theta}$. Soit alors z une racine n -ième de a , dont on notera α un argument :

$$z^n = a \Leftrightarrow e^{in\alpha} = e^{i\theta} \Leftrightarrow n\alpha = \theta \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}$$

Les racines n -ièmes de a sont donc les n nombres :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

On en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, 1+z_k = 1 + e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)}$$

D'où résulte aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, (1+z_k)^n = 2^n \cos^2\left(\frac{\theta}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)}$$

On en déduit que tous les points M_k ont une affixe d'argument $\frac{\theta}{2}$ module π , donc qu'ils appartiennent à la droite dont une équation complexe est $\arg(z) = \frac{\theta}{2}$, qui passe par l'origine du plan complexe.

Exercice. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

- | | |
|--|---|
| 1. $A = \{z \in \mathbb{C} / z - \bar{z} = 2i\}$ | 5. $E = \{z \in \mathbb{C} / \left \frac{z-3}{z-5}\right = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ |
| 2. $B = \{z \in \mathbb{C} / \left \frac{z-1}{z-i}\right = 1\}$ | 6. $F = \{z \in \mathbb{C} / z, z^2, z^4 \text{ alignés}\}$ |
| 3. $C = \{z \in \mathbb{C} / z + \bar{z} = z \}$ | 7. $G = \{z \in \mathbb{C} / 1, z, z^2 \text{ forment un triangle rectangle}\}$ |
| 4. $D = \{z \in \mathbb{C} / \left \frac{z-3}{z-5}\right = 1\}$ | 8. $H = \{z \in \mathbb{C} / 1, z, z^3 \text{ alignés}\}$ |

- En écrivant $z = x + iy$, et résolvant l'équation, nous obtenons simplement $y = 1$. Donc A est la droite d'équation $y = 1$.
- De même, en passant en algébrique et en calculant les modules, nous obtenons simplement la droite $y = x$.
- Là encore, même méthode et nous obtenons l'équation $\sqrt{y^2 + x^2} = 2x \geq 0 \Leftrightarrow y^2 = 3x^2$ avec $x \geq 0$. D'où, les solutions sont les deux demi-droites $y = \pm x\sqrt{3}$ avec $x \geq 0$.
- L'équation revient à $|z-3| = |z-5|$. Ce sont donc tous les points équidistants des points d'affixes 3 et 5, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3;0)$ et $B(5;0)$. Ainsi, c'est la droite d'équation $x = 4$. On retrouve le même résultat avec le calcul algébrique.
- Cette fois nous le faisons en algébrique : $y^2 + (x-1)^2 - 8 = 0$, donc c'est le cercle de centre $(1;0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
- Nous avons $\frac{z^4 - z^2}{z - z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -z(z+1) \in \mathbb{R}$. En posant $z = x + iy$ et en annulant la partie imaginaire, nous obtenons $y(1+2x) = 0$, les solutions sont donc la réunion des droites $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.
- Soit $\frac{z^2 - z}{1 - z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$. C'est donc la droite $x = 0$.
— Soit $\frac{z - z^2}{1 - z^2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{1+z} \in i\mathbb{R}$. En posant $z = x + iy$, on calcul la partie réelle de la fraction qui doit être nulle, on trouve : $y^2 + x^2 + x = y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$. C'est donc le cercle de centre $(-\frac{1}{2}; 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
— Soit $\frac{z^2 - 1}{z - 1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -1 + iy$. C'est donc la droite d'équation $x = -1$.
- Remarquons que l'alignement est réalisé dès que des points sont confondus, c'est-à-dire, $z \in \{0; -1; 1; j; j^2\}$. Sinon, ils sont alignés si et seulement si $\frac{z^3 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(1+2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. On remarque que les cinq points particuliers sont sur ces droites. Les solutions sont donc ces deux droites.