

Ensembles

TD

Proposition de correction

Exercice. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $A \cap B = A \cup B$ équivaut à $A = B$.
 2. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.
 3. Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$. Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.
 1. \Rightarrow Deux démonstrations possibles :

Directe : Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$, donc $x \in B$ et $A \subset B$. En permutant A et B , nous avons $A = B$.

Par contraposée : Si $A \neq B$, alors il existe $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. Quitte à permuter A et B , on peut supposer que $x \in A \setminus B$. Dans ce cas $x \in A \subset A \cup B$, mais $x \notin B$, donc $x \notin A \cap B$. D'où $A \cup B \neq A \cap B$.
 2. \Leftarrow Évident car si $A = B$, alors $A \cup B = A = A \cap B$.
 2. \Rightarrow Soit $x \in A \cap \bar{B}$. On veut montrer que $x \in A \cap \bar{C}$. Nous avons déjà que $x \in A$. Supposons que $x \in C$, alors $x \in A \cap C = A \cap B$, donc $x \in B$, ce qui est absurde. Donc $x \notin C$ et $x \in A \cap \bar{C}$.
L'inclusion réciproque se montre de la même manière en permutant B et C .
 3. \Leftarrow $B = \bar{\bar{B}}$ et $C = \bar{\bar{C}}$. Donc il suffit d'utiliser le sens direct pour montrer la réciproque.
3. Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cup C$, donc $x \notin A$, d'où $x \in B$. Mais comme $x \notin C$, $x \in B \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$. En prenant $A = B = C$ non vide, nous avons $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \setminus A = \emptyset$ et $A \cup (B \setminus C) = A \cup \emptyset = A \neq \emptyset$.

Exercice. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

1. Écrire le produit cartésien $A \times B$.
2. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?
 1. $A \times B = \{(a_1; b_1); (a_1; b_2); \dots; (a_1; b_5); \dots; (a_4; b_5)\}$.
 2. $A \times B$ est un ensemble à 20 éléments, il y a donc 2^{20} parties.

Exercice. Soit E et F deux ensembles. Tous les sous-ensembles de $E \times F$ sont-ils de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?

Non, par exemple, si $E = F = \mathbb{R}$, alors un cercle C est bien une partie de $E \times F = \mathbb{R}^2$, mais ne peut s'écrire comme le produit cartésien d'une partie de \mathbb{R} par une partie de \mathbb{R} (qui ne forment que des rectangles).

Exercice. Soit $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E .

On suppose que pour tout indice i de I , on a $E = A_i \cup B_i$. Montrer que $E = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$.

\supseteq Pour tout $i \in I$, $A_i \subset E$ et $B_i \subset E$, donc toute intersection ou réunion des A_i et des B_i est dans E , d'où l'inclusion.

\subseteq Soit $x \in E$. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$. Sinon, nous avons nécessairement que

$$\forall i \in I, x \in B_i, \text{ c'est-à-dire } x \in \bigcap_{i \in I} B_i \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

D'où l'égalité.

Par symétrie des hypothèses en A_i et B_i , on démontre de même que $E = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)$.

Exercice. Soit A, B, C, D des parties d'un ensemble E . Montrer que :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
 1. Nous allons utiliser les lois de De Morgan. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \setminus (B \cup C)$.
 2. De même, $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \bar{B}) \cap (C \cap \bar{D}) = (A \cap C) \cap (\bar{B} \cap \bar{D}) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cup D)} = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

Exercice. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E . Montrer que :

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

On peut raisonner par inclusion ou avec les lois de Morgan.

 1. $A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
 2. $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Exercice. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On suppose que :

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cup B \neq E, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A.$$

On pose

$$A_1 = A \cap B, A_2 = A \cap \overline{B}, A_3 = B \cap \overline{A}, A_4 = \overline{A \cup B}.$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

1.

- L'ensemble A_1 est non vide par hypothèse.
- Si $A \not\subseteq B$, alors A_2 est non vide.
- De même pour A_3 .
- Puisque $A \cup B \neq E$, A_4 est non vide.

2.

- $A_1 \cap A_2 = A \cap B \cap A \cap \overline{B} = \emptyset$.
- $A_1 \cap A_3 = A \cap B \cap B \cap \overline{A} = \emptyset$.
- $A_1 \cap A_4 = A \cap B \cap \overline{(A \cup B)} = A \cap B \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$.
- $A_2 \cap A_3 = A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A} = \emptyset$.
- $A_2 \cap A_4 = A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
- $A_3 \cap A_4 = B \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

3. $A_1 \cup A_2 = A \cap (B \cup \overline{B}) = A$. De même, $A_1 \cup A_3 = B$, donc $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \cup B$ et finalement $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

On en conclut que A_1, A_2, A_3 et A_4 forment une partition de E .

Exercice. Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Résoudre les équations d'inconnue $X \subset E$.

1. $A \cup X = B$

2. $A \cap X = B$

1. Nous avons nécessairement $A \subset B$, sans quoi l'équation n'a pas de solution. Dans ce cas nous avons aussi $X \subset B$. De plus, un schéma avec $A \subset B$, nous montre que nous avons nécessairement $B \setminus A \subset X$, sans quoi l'union ne pourra jamais reconstituer B . En conclusion, les solutions sont les ensembles X vérifiant $B \setminus A \subset X \subset B$.
2. Là encore nous avons nécessairement $B \subset A$. Dans ce cas, nous avons $B \subset X$. De plus, un schéma nous montre qu'aucun élément de X ne peut être dans $A \setminus B$, sans quoi l'intersection avec A sera plus grande que B . D'où $X \subset \overline{(A \setminus B)} = A \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Finalement, les solutions sont les ensembles X vérifiant $B \subset X \subset \overline{A \cup B}$.

Exercice. Soit A, B, C, D quatre ensembles.

1. Montrer que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

2. Comparer $(A \times B) \cap (C \times D)$ et $(A \cap C) \times (B \cap D)$.

1. Soit $z \in (A \times C) \cup (B \times C)$ alors, soit $z = (a; c) \in A \times C$, soit $z = (b; c) \in B \times C$. Dans les deux cas, la première composante de z est dans $A \cup B$, d'où $z \in (A \cup B) \times C$.
Réciproquement, soit $z \in (A \cup B) \times C$, alors $z = (d; c)$, avec $d \in A \cup B$. Si $d \in A$, alors $z \in A \times C$ et si $d \in B$, alors $z \in B \times C$, donc $z \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
2. Montrons que ces deux ensembles sont égaux. Soit $z \in (A \times B) \cap (C \times D)$, alors $z = (x; y)$ avec $(x; y) \in A \times B$ et $(x; y) \in C \times D$, donc $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. D'où $(x; y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ d'où l'inclusion.
Réciproquement, soit $z \in (A \cap C) \times (B \cap D)$, alors $z = (x; y)$ avec $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. En particulier, $x \in A$ et $y \in B$, donc $z \in A \times B$. Mais on a aussi $x \in C$ et $y \in D$, d'où $z \in C \times D$. Finalement $z \in (A \times B) \cap (C \times D)$. (Remarque : on a réuni A avec B et C avec D , mais on aurait pu faire l'inverse on montre alors que notre ensemble est aussi inclus dans $(A \times D) \cap (C \times B)$. En fait, les trois ensembles sont égaux.)