10. Espaces vectoriels

10.1. Espaces vectoriels

Exercice 10.1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble E muni de l'addition $\oplus$ et de la multiplication externe $\otimes$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^2\\ \forall u(x;y)\in E,\ \forall v(x';y')\in E,\quad & u\oplus v=(x+x';y+y')\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u(x;y)\in E,\quad & \lambda\otimes u=(2x;0)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}_+^*\\ \forall x\in E,\ \forall y\in E,\quad & x\oplus y=xy\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in E,\quad & \lambda\otimes x=x^\lambda\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^n (n\geq 1)\\ \forall u\,(x_1;x_2;\dots;x_n)\in E,\ \forall v\,(y_1;y_2;\dots;y_n)\in E,\quad & u\oplus v=(x_1+y_1;x_2+y_2;\dots;x_n+y_n)\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u\,(x_1;x_2;\dots;x_n)\in E,\quad & \lambda\otimes u=(\lambda x_1;\lambda x_2;\dots;\lambda x_n)\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^2\\ \forall u(x;y)\in E,\ \forall v(x';y')\in E,\quad & u\oplus v=(x+x';y+y')\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u(x;y)\in E,\quad & \lambda\otimes u=(\lambda x;0)\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^2\\ \forall u(x;y)\in E,\ \forall v(x';y')\in E,\quad & u\oplus v=(x+x';y+y')\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u(x;y)\in E,\quad & \lambda\otimes u=(\lambda x;y)\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^2\\ \forall u(x;y)\in E,\ \forall v(x';y')\in E,\quad & u\oplus v=(x;y)\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u(x;y)\in E,\quad & \lambda\otimes u=(\lambda x;\lambda y)\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} &E=\mathbb{R}^2\\ \forall u(x;y)\in E,\ \forall v(x';y')\in E,\quad & u\oplus v=(x+x';y+y')\\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u(x;y)\in \mathbb{R}^2,\quad & \lambda\otimes u=(\lambda^2 x;\lambda^2 y)\end{aligned}$$

8.
$$E=\mathbb{R}[X]$$
$\oplus$ est l'addition usuelle des polynômes.
$\otimes$ est la multiplication usuelle d'un polynôme par un réel.

Exercice 10.2 (*). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E\times E$ de l'addition usuelle :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

et de la multiplication externe par un nombre complexe définie par :

$$(a+ib)\cdot(x,y)=(ax-by,ay+bx).$$

Montrer que $E\times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. *Celui-ci s'appelle complexifié de E.*

10.2. Sous-espaces vectoriels

Exercice 10.3 (*). Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, identifier ceux qui sont stables par l'addition, par la multiplication externe et ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $\mathbb{Z}^2$.
2. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |x|=|y|\}$.
3. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x=y\}$.
4. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x+y=1\}$.

Exercice 10.4 (*). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'ils sont des sous-espaces vectoriels. (Préciser à chaque fois l'espace vectoriel dont ils sont sous-espace)

1. $E_1=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y+3z=0\}$
2. $E_2=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y+3z=2\}$
3. $E_3=\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x=y=2z=4t\}$
4. $E_4=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy=0\}$
5. $E_5=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=x^2\}$
6. $E_6=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2+4=0\}$
7. $E_7=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ 3x-7y=z\}$
8. $E_8=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x^2-y^2=0\}$
9. $E_9=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=x+y+z=0\}$
10. $E_{10}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z(x^2+y^2)=0\}$
11. $E_{11}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=0\}$.
12. $E_{12}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y+a=0 \text{ et } x+3az=0\}$, $a\in\mathbb{R}$.
13. $E_{13}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ /\ f(1)=0\}$.
14. $E_{14}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ /\ f(0)=1\}$.
15. $E_{15}=\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P'=3\}$.
16. $E_{16}=\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P(X)=XP'(X)+P(0)\}$.

Exercice 10.5 (*). Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u=(1,1,1,0)$ et $v=(0,0,1,1)$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x,y,z,t pour que $(x,y,z,t)\in\mathrm{Vect}(u,v)$.

Exercice 10.6. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 10.7. Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E\,;\oplus\,;\otimes)$.
Montrer que $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 10.8. Soit $(E\,;\oplus\,;\otimes)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 10.9. Soit $(E\,;\oplus\,;\otimes)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
2. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(A) = A$.
3. Montrer que si $A \subset B \subset F$ et A engendre F, alors B engendre F.

Exercice 10.10. Soit E l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + xy' - x^2 y = 0$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

10.3. Familles libres, liées et génératrices

Exercice 10.11 (*). Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (u,v) avec $u(1;2;3)$ et $v(-1;4;6)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. (u,v,w) avec $u(1;2;-1)$, $v(1;0;1)$ et $w(-1;2;-3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. (u,v,w) avec $u(1;0;1)$, $v(0;2;2)$ et $w(3;7;1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. (u,v,w,z) avec $u(1;2;3)$, $v(5;6;7)$, $w(9;10;11)$ et $z(13;14;15)$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. (u,v,w) avec $u(1;0;1;-1)$, $v(-1;1;1;2)$ et $w(1;-2;-3;-3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10.12. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $f(x) = x, g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \mathrm{e}^x$. Montrer que la famille (f,g,h) est libre.

Exercice 10.13. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1(1;1;0)$, $v_2(4;1;4)$ et $v_3(2;-1;4)$.

1. Déterminer si la famille (v_1, v_2) est libre.
2. Déterminer si la famille (v_1, v_3) est libre.
3. Déterminer si la famille (v_2, v_3) est libre.
4. Déterminer si la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Exercice 10.14. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \text{ et } x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \right\}$. Soit $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$
$v_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}, u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_6 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_8 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_9 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$
Pour chacune des familles suivantes, indiquer si elles sont libres dans E et si elles sont génératrices de E.

1. $(v_1\,;v_2\,;v_3\,;v_4\,;v_5)$
2. $(u_5\,;u_7\,;u_9)$
3. $(u_1\,;u_2\,;u_3\,;u_4)$
4. $(u_1\,;u_4\,;u_5)$
5. $(u_3\,;u_5)$
6. $(u_6\,;u_7\,;u_8\,;u_9)$
7. $(u_1\,;u_2)$
8. $(u_2\,;u_4\,;u_8)$
9. $(u_3\,;u_5\,;u_7\,;u_9)$

Exercice 10.15 (*). On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1(1;-1;1)$, $v_2(2;-2;2)$ et $v_3(2;-1;2)$.

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un .
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 10.16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On pose $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ et $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $v_i = u_i + u$.
À quelle condition sur les α_i, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est-elle libre ?

Exercice 10.17. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $F_n = (f_1, \ldots, f_n)$ la famille de n vecteurs de E définie par

$$\begin{aligned} f_i &= e_i + e_{i+1} \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ f_n &= e_n + e_1 \end{aligned}$$

1. Montrer que si $n = 2$, la famille F_2 est liée.
2. Montrer que si $n = 3$, la famille F_3 est libre. Est-elle une base de E ?
3. Montrer que si $n = 4$, la famille F_4 est liée.
4. Traiter le cas $n \geq 5$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 10.18. Soit $u \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, v \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, u' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que les familles (u,v) et (u',v') engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$$

Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle.

10.4. Bases et dimensions

Exercice 10.20.

1. Montrer que les vecteurs $u = (1,-1,1)$, $v = (2,1,-1)$ et $w = (-1,3,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle sont les coordonnées d'un vecteur (a,b,c) dans cette base ?
2. Montrer que i et j forment une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.21. Soit $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + 3z = 0,\ 2x + y + z - 2t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de E.

Exercice 10.22. Soit $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0,\ 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.

Soit $a(1;1;1)$, $b(1;0;1)$ et $c(0;1;1)$.

3. Montrer que (b,c) est une base de F.
4. Montrer que (a,b,c) est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.
5. En déduire que (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer $u(x;y;z)$ dans la base $(a;b;c)$.

Exercice 10.23. Soit $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 4x - 2y + t = 0\}$. Donner une base de E.

Exercice 10.24. Les familles suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$ (Discuter, le cas échéant, selon les valeurs de a, b, c, d et e) ?

1. $F_1 = ((1;-1;0),(2;-1;2))$.
2. $F_2 = ((1;-1;0),(2;-1;2),(1;0;a))$ avec a un réel.
3. $F_3 = ((1;0;0),(a;b;0),(c;d;e))$ avec a,b,c,d,e réels.
4. $F_4 = ((1;1;3),(3;4;5),(-2;5;7),(8;-1;9))$.

Exercice 10.25 (*). Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel, puis en donner une base et la dimension.

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.
2. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = z + t = 0\}$.
3. $G = \{(x,x,y,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
4. $H = \{a + aX^2 + bX^4,\ a,b \in \mathbb{R}\}$.
5. $K = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$.

Exercice 10.26 (*). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soit $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est libre, puis la compléter en une base de E.

Exercice 10.27 (*). Soit E l'ensemble des nombres complexes considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $z = a + ib \in E$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.
Sous quelle condition z et $\bar{z}$ forment-ils une base de E ? Dans ce cas, calculer les coordonnées d'un nombre complexe $x + iy$ dans cette base.

Exercice 10.28. Soit $u(0;1;1)$, $v(1;0;1)$ et $w(1;1;0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $z = (1;1;1)$.

Exercice 10.29. Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer si chacune des familles suivantes peut être complétée en une base de E. Si oui, le faire.

1. $F_1 = (u,v,w)$ avec $u(1;2;-1;0)$, $v(0;1;-4;1)$ et $w(2;5;-6;1)$.
2. $F_2 = (u,v,w)$ avec $u(1;0;2;3)$, $v(0;1;2;3)$ et $w(1;2;0;3)$.
3. $F_3 = (u,v)$ avec $u(1;-1;1;-1)$ et $v(1;1;1;1)$.

Exercice 10.30 (*). Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel. Montrer que le produit cartésien $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension lorsque E et F sont de dimension finie ?

10.5. Somme d'espaces vectoriels

Exercice 10.31 (*). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0)$ et $y = (1,1,0,-1)$. Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$ et $G = \text{Vect}(x,y)$.
Déterminer la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 10.32.

1. Soit

$$E = \text{Vect}((1;0;-2;0;1),(-1;1;4;5;0),(2;1;-2;5;3))$$
$$F = \text{Vect}((1;2;2;10;3),(0;1;-5;2;4),(1;0;12;6;-5))$$

   a) Déterminer une base de E, F, $E + F$ et $E \cap F$.

   b) Vérifier la formule de Grassmann.

2. Mêmes questions avec

$$E = \text{Vect}((1;0;0;2;4),(2;1;2;3;4),(3;1;4;1;5),(0;0;-2;4;3))$$
$$F = \text{Vect}((4;1;2;7;12),(6;2;6;6;13),(4;0;1;2;4),(6;3;7;11;21))$$

Exercice 10.33 (*). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,1,0,0), v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$.

1. $\text{Vect}(v_1,v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $\text{Vect}(v_1,v_3,v_4)$ et $\text{Vect}(v_2,v_5)$?

[*]

Exercice 10.34. Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$$
$$G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 2z = 0\}$$

1. Donner une base de F et une base de G. En déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$ et en déduire sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F (trouvée en 1.) et des vecteurs de la base de G (trouvée en 1.) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 10.35 (*). Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - 2z = 0\}$$
$$G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2y = x + z\}$$

1. Déterminer la dimension de F.
2. Déterminer la dimension de G.
3. Déterminer $F \cap G$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 10.36.

1. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + 2z = 0\}$. Sont-ils en somme directe ?
2. Soit $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\}$ et $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\}$.
   a) Sont-ils en somme directe ?
   b) Trouver un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^2$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,1,1)$. Est-il unique ?

Exercice 10.37. Dans $\mathbb{R}^3$, soit les sous-espaces $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$.

1. Déterminer $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$.
2. Trouver un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_1, puis dans E_2. Ces supplémentaires sont-ils uniques ?

Exercice 10.38. Soit $n \in \mathbb{N}$, E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F la partie de E constituée des applications de la forme :

$$f : x \mapsto P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x)$$

avec P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim(F)$.

Exercice 10.39 (*). Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 10.40 (*).

1. Montrer que les polynômes $P_1(X) = X(X-1)$, $P_2(X) = X(X+1)$, $P_3(X) = (X-1)(X+1)$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2 + X + 1}{X^3 - X}.$$

Exercice 10.41. Soit $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit a, b, c trois réels et $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit α, β, γ trois réels et $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer Q dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B, C réels, montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$R(0) = A, \quad R(1) = B \quad \text{et} \quad R(2) = C$$

Exercice 10.42 (*). Dans $\mathbb{R}_5[X]$, soit F l'ensemble des polynômes divisibles par $X(X-1)^2$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$.
2. Donner la dimension et une base de F.
3. Montrer que $\mathbb{R}_5[X] = F \oplus \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10.43. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(-1) = 0, P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 10.44. Soit

$$F = \{(x;y;z;t)\,\mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z = 0, 2x + y + z - t = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}((1;-2;1;1), (1;2;-3;1), (5;-3;-2;5))$$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 10.45. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$v_1(1;2;0;1) \quad v_2(1;0;2;1) \quad v_3(2;0;4;2)$$
$$w_1(1;2;1;0) \quad w_2(-1;1;1;1) \quad w_3(2;-1;0;1) \quad w_4(2;2;2;2)$$

1. Montrer que (v_1, v_2) est libre et que (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que (w_1, w_2, w_3) est libre et que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
   a) Déterminer une base de F.

   b) Donner un supplémentaire de F.

5. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.
6. a) À l'aide des bases trouvées en 4a) et 5., construire une famille génératrice de $F+G$.
   b) En déduire que $F+G=\mathbb{R}^4$.
7. a) Montrer que $v_1+v_2 \in F\cap G$.
   b) Calculer la dimension de $F\cap G$.
   c) Donner une base de $F\cap G$.
8. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 10.46. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$v_1(1;3;-2;2) \quad v_2(2;7;-5;6) \quad v_3(1;2;-1;0)$$
$$w_1(1;3;0;2) \quad w_2(2;7;-3;6) \quad w_3(1;1;6;-2)$$

Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F.
2. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G.
3. Montrer que $(v_1; v_2; w_1; w_2)$ est liée. En déduire une base de $F+G$.

Exercice 10.47 (*). Soit A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}(A\cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(A\cup B)=\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$.