

## Fractions Rationnelles

TD

Proposition de correction

**Exercice.** Effectuer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles suivantes :

1.  $\frac{X}{X^2-4}$

2.  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$

3.  $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

4.  $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

5.  $\frac{1}{X(X-1)^2}$

6.  $\frac{2X}{X^2+1}$

7.  $\frac{1}{X^2+X+1}$

8.  $\frac{4}{(X^2+1)^2}$

9.  $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

10.  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$

11.  $\frac{1}{X^4+X^2+1}$

12.  $\frac{3}{(X^3-1)^2}$

13.  $\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$

1.  $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X+2} + \frac{1}{X-2} \right)$

2.  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

3.  $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$

4.  $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}$

5.  $\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$

6.  $\frac{2X}{X^2+1} = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$

7.  $\frac{1}{X^2+X+1} = -\frac{j}{X-j} + \frac{j}{X-j^2}$  où  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

8.  $\frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} - \frac{1}{(X+i)^2}$

9.  $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \frac{5}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{5}{X+1} - \frac{4}{(X+1)^2}$

10.  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 - \frac{5}{16} \times \frac{1}{X+1} + \frac{37}{16} \times \frac{1}{X-1} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{(X-1)^3}$

11.  $\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1-j}{6(X-j)} + \frac{1-j^2}{6(X-j^2)} - \frac{1-j}{6(X+j)} - \frac{1-j^2}{6(X+j^2)}$  où  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

12.  $\frac{3}{(X^3-1)^2} = -\frac{2}{3(X-1)} + \frac{1}{3(X-1)^2} - \frac{2j}{3(X-j)} + \frac{j^2}{3(X-j)^2} - \frac{2j^2}{3(X-j^2)} + \frac{j}{3(X-j^2)^2}$

13. La décomposition se présente sous la forme (les  $a_k$  constituant une famille de réels) :

$$D(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X-k}$$

Or, en considérant, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , la fraction  $(X-k)F(X)$  en  $k$ , on obtient :

$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\cdots 1 \times (-1)\cdots (k-n)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

Par conséquent :

$$\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{X-k}$$

**Exercice.** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  les fractions rationnelles suivantes

1.  $\frac{X}{(X+i)^2}$

2.  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$

1.  $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$

2.  $X^2+iX+2 = (X-i)(X+2i)$ . D'où  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$

**Exercice.** Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  et dans  $\mathbb{R}(X)$  :

1.  $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$

2.  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$

3.  $\frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$

4.  $\frac{X^2+1}{(X-1)^3(X^3-8)}$

5.  $\frac{X^2+3}{X^3-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$

6.  $\frac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$

1.  $F(X) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{X+i} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{X-i} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{X+2i} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{X-2i} = \frac{1}{3} \times \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{3} \times \frac{x}{x^2+4}$

2.  $F(X) = \frac{7}{12} \times \frac{i}{x+2i} - \frac{7}{12} \times \frac{i}{x-2i} - \frac{2}{3} \times \frac{i}{x+i} + \frac{2}{3} \times \frac{i}{x-i} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{X^2+4} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{X^2+1}$

3. Une division euclidienne permet d'obtenir la partie entière de  $F(X)$ , à savoir 1. Les pôles sont  $-1; i; -i$ . Ce sont des pôles doubles. En tenant compte du fait que ses coefficients sont réels, la décomposition en éléments simples de  $F(X)$  dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit donc sous la forme :

$$F(X) = 1 + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{\bar{c}}{X+i} + \frac{d}{(X-i)^2} + \frac{\bar{d}}{(X+i)^2}$$

où  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et  $(c; d) \in \mathbb{C}^2$ .

En considérant  $(X+1)^2 F(X)$  en  $-1$ , on obtient  $b = \frac{1}{4}$ . En considérant  $(X-i)^2 F(X)$  en  $i$ , on obtient  $d = -\frac{i}{8}$ .

$$\begin{aligned} \frac{a}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\bar{c}}{X+i} &= F(X) - 1 - \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{i}{8(X-i)^2} - \frac{i}{8(X+i)^2} \\ &= \frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2} - 1 - \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{1}{4(X^2+1)^2} \\ &= \frac{-8X^5 - 13X^4 - 18X^3 - 18X^2 - 10X - 5}{4(X^2+1)^2(X+1)^2} \end{aligned}$$

On sait que le numérateur doit se factoriser par  $(X+1)(X^2+1)$  (sinon il y a une erreur de calculs) :

$$\begin{aligned} &= \frac{(X+1)(X^2+1)(-8X^2-5X-5)}{4(X^2+1)^2(X+1)^2} \\ &= \frac{-8X^2-5X-5}{4(X^2+1)(X+1)} = G(X) \end{aligned}$$

En considérant  $(X+1)G(X)$  en  $-1$ , on obtient alors  $a = -1$ .

En considérant  $(X-i)G(X)$  en  $i$ , on obtient enfin :

$$c = \frac{8-5i-5}{4(2i)(i+1)} = \frac{3-5i}{8(-1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}i$$

D'où

$$F(X) = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{i-4}{8(X-i)} + \frac{-4-i}{8(X+i)} - \frac{i}{8(X-i)^2} + \frac{i}{8(X+i)^2}$$

Puis, dans  $\mathbb{R}$ . Attention, les pôles de seconde espèce étant doubles, nous ne pouvons pas utiliser la technique qui consiste à réunir les pôles conjugués. Nous repartons de la forme

$$F(X) = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{aX+b}{4(X^2+1)} + \frac{CX+d}{2(X^2+1)^2}$$

Les coefficients  $c$  et  $d$  s'obtiennent facilement par « multiplication, évaluation » par  $(X^2+1)^2$  et  $X=i$  :  $c = \frac{1}{2}$  et  $d = 0$ . Pour  $a$  et  $b$  il reste l'évaluation en deux points ou la parité de  $f$  (attention,  $XF(X)$  ne fonctionne pas car nous n'avons pas éliminé la partie entière). Ainsi :

$$F(X) = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{4X+1}{4(X^2+1)} + \frac{X}{2(X^2+1)^2}$$

4. Observons pour commencer que :

$$F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)^3(X-2)\left(X-2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-2e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

Ses coefficients étant réels et son degré négatif, la décomposition en éléments simples de  $F(X)$  dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit sous la forme :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{X-2} + \frac{\lambda}{X-2e^{i\frac{2\pi}{3}}} + \frac{\bar{\lambda}}{X-2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

En considérant  $(X-1)^3 F(X)$  en 1, on obtient  $c = -\frac{2}{7}$ .

En considérant  $(X-2)F(X)$  en 2, on obtient  $d = \frac{5}{12}$ .

En considérant  $(X-2e^{i\frac{2\pi}{3}})F(X)$  et  $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ , on obtient  $\lambda = \frac{(97-53i\sqrt{3})}{8232}$ .

En considérant  $\lim_{X \rightarrow +\infty} XF(X)$ , on obtient  $a + \frac{5}{12} + \frac{97}{4116} = 0$ , soit :  $a = -\frac{151}{343}$ .

En considérant  $F(0) = \frac{1}{8}$ , on obtient :

$$\frac{151}{343} + b + \frac{2}{7} - \frac{5}{24} - \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\frac{97-53i\sqrt{3}}{8232} - \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{97+53i\sqrt{3}}{8232} = \frac{1}{8}$$

D'où après simplifications :  $b = -\frac{20}{49}$ , on obtient ainsi la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

$$F(X) = -\frac{151}{343(X-1)} - \frac{20}{49(X-1)^2} - \frac{2}{7(X-1)^3} + \frac{5}{12(X-2)} + \frac{97-53i\sqrt{3}}{8232(X-2e^{i\frac{2\pi}{3}})} + \frac{97+53i\sqrt{3}}{8232(X-2e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$$

Dans  $\mathbb{R}(X)$ , cette décomposition s'écrit par conséquent :

$$F(X) = \frac{5}{12(X-2)} - \frac{151}{343(X-1)} - \frac{20}{49(X-1)^2} - \frac{2}{7(X-1)^3} + \frac{97X+256}{4116(X^2+2X+4)}$$

5. Notons  $P(X) = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2$ . Il faut commencer par remarquer que  $P(1) = 0$ . On peut alors tester la multiplicité de 1 comme racine de  $P$  : on s'aperçoit que 1 est racine triple car  $P'(1) = P''(1) = 0$ . On en déduit que  $P(X)$  est factorisable par  $(X-1)^3$ . En effectuant ensuite la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ , on obtient  $X^2 + 2$  comme quotient. Ainsi :

$$F(X) = \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}$$

On en déduit, compte tenu de  $P \in \mathbb{R}[X]$ , l'existence de  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{X+i\sqrt{2}} + \frac{\bar{d}}{X-i\sqrt{2}}$$

En considérant  $(X-1)^3 F(X)$  et 1, on obtient  $c = \frac{4}{3}$ .

En considérant  $(X+i\sqrt{2})F(X)$  et  $-i\sqrt{2}$ , on obtient  $d = \frac{1}{27} \frac{-2+5\sqrt{2}i}{4}$ .

En considérant  $XF(X)$  en  $+\infty$ , on obtient  $a+d+\bar{d}=0 \Rightarrow a = \frac{1}{27}$ .

En considérant enfin  $F(0) = -\frac{3}{2}$ , on obtient  $b = -\frac{2}{9}$ .

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{27(X-1)} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{3(X-1)^3} + \frac{-2+5\sqrt{2}i}{108(X+i\sqrt{2})} - \frac{2+5\sqrt{2}i}{108(X-i\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{27(X-1)} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{3(X-1)^3} - \frac{X-5}{27(X^2+2)} \end{aligned}$$

6. Une division euclidienne permet d'obtenir la partie entière de  $F(X)$ , à savoir 1. Les racines de  $P(X) = X^2 + X + 1$  étant  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ , celles de  $Q(X) = P(X^2) = X^4 + X^2 + 1$  sont les racines carrées de  $j$  et  $j^2$ , à savoir :

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Compte tenu de ses coefficients réels, la décomposition en éléments simples de  $F(X)$  dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit donc sous la forme :

$$F(X) = 1 + \frac{a}{X - e^{i\frac{2\pi}{3}}} + \frac{\bar{a}}{X - e^{-i\frac{2\pi}{3}}} + \frac{b}{X - e^{i\frac{\pi}{3}}} + \frac{\bar{b}}{X - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

On obtient :

$$a = \frac{(e^{i\frac{2\pi}{3}})^4 + 1}{Q'(e^{i\frac{2\pi}{3}})} = \frac{3+i\sqrt{3}}{12} \quad ; \quad b = \frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^4 + 1}{Q'(e^{i\frac{\pi}{3}})} = \frac{i\sqrt{3}-3}{12}$$

D'où

$$F(X) = 1 + \frac{3+i\sqrt{3}}{12(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})} + \frac{3-i\sqrt{3}}{12(X - e^{-i\frac{2\pi}{3}})} + \frac{i\sqrt{3}-3}{12(X - e^{i\frac{\pi}{3}})} - \frac{3+i\sqrt{3}}{12(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})}$$

Puis :

$$F(X) = 1 + \frac{X}{2(X^2+X+1)} - \frac{X}{2(X^2-X+1)}$$

**Exercice.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $(p; q) \in \mathbb{R}^2$  pour que la fraction rationnelle  $F(X)$  suivante ne contienne aucun terme en  $\frac{1}{X}$  ni en  $\frac{1}{(X-1)}$  dans sa décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  :

$$F(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^2(X^2+pX+q)}$$

Supposons que ni 0, ni 1 ne sont racines de  $(X^2+pX+q)$ . Alors la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{R}(X)$  s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{X^2(X-1)^2(X^2+pX+q)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{\lambda X + \mu}{X^2+pX+q}$$

où tous les coefficients indéterminés introduits sont réels. En utilisant la méthode «  $\left(\frac{P}{Q_1}\right)'$  » en 0 puis en 1, on obtient :

$$a = \frac{2q-p}{q^2} \quad ; \quad c = -\frac{4+3p+2q}{(1+p+q)^2}$$

La condition recherchée est donc :  $2q-p=0=4+3p+2q$ .

La résolution de ce système fournit alors la condition nécessaire et suffisante :  $p=-1$  et  $q=-\frac{1}{2}$ .

Supposons maintenant que 0 soit racine de  $(X^2+pX+q)$ , c'est-à-dire  $q=0$ . Si de plus  $p=0$ , alors la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{R}(X)$  s'écrit sous la forme :

$$F(X) = \frac{1}{X^4(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X^4} + \frac{e}{X-1} + \frac{f}{(X-1)^2}$$

où tous les coefficients indéterminés introduits sont réels. On obtient, par exemple après une « multiplication évaluation », une division suivant les puissances croissantes et une limite en  $+\infty$  :

$$F(X) = \frac{4}{X} + \frac{3}{X^2} + \frac{2}{X^3} + \frac{1}{X^4} - \frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Donc la condition recherchée n'est pas vérifiée dans ce cas.

Si  $p \neq 0$ , on aboutit à la même conclusion avec une méthode similaire. Et il en va de même si on considère les cas où 1 est racine simple, puis double de  $(X^2+pX+q)$ .

Conclusion : la condition nécessaire et suffisante est que  $p=-1$  et  $q=-\frac{1}{2}$ .

**Exercice.** Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{1}{X^n-1} \quad ; \quad F_2(X) = \frac{X^n+1}{X^n-1}$$

Posons  $P(X) = X^n - 1$ . Les racines de  $P$  sont les  $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ , où  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  (et vérifient donc  $\omega_k^n = 1$ ). Ce sont aussi les pôles simples de la fraction  $F_1$ , et on a :

$$F_1(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(\omega_k)} \frac{1}{X-\omega_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} \frac{1}{X-\omega_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{\omega_k^n} \frac{1}{X-\omega_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{X-\omega_k}$$

Pour  $F_2$ , on peut utiliser la même méthode ou simplement remarquer que  $F_2(X) = \frac{X^n-1+2}{X^n-1} = 1 + \frac{2}{X^n-1} = 1 + 2F_1(X)$ . D'où

$$F_2(X) = 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{X-\omega_k}$$

**Exercice.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Former la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  de

$$F(X) = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

La décomposition se présente sous la forme (les  $a_k$  constituant une famille de réels) :

$$F(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X-k}$$

Or, en considérant, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , la fraction  $(X-k)F(X)$  en  $k$ , on obtient :

$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\dots 1 \times (-1)\dots(k-n)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

Par conséquent :

$$F(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{X-k}$$

**Exercice.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

1. Soit  $a$  un zéro d'ordre  $\alpha \geq 1$  de  $F$ . Montrer que  $a$  est zéro d'ordre  $\alpha - 1$  de  $F'$ .
2. Comparer les pôles de  $F$  et de  $F'$ , ainsi que leur ordre de multiplicité respectifs.

Notons  $\frac{P}{Q}$  le représentant irréductible de  $F$ .

1. Soit  $a$  une racine de  $P$  multiplicité  $m \geq 1$ . On a :  $P(X) = (X - a)^m R(X)$  avec  $R(a) \neq 0$  et  $Q(a) \neq 0$ .

$$F'(X) = \frac{(X - a)^{m-1} (mR(X)Q(X) + (X - a)R'(X)Q(X) - (X - a)R(X)Q'(X))}{(Q(X))^2}$$

Le nombre  $a$  n'est pas racine de  $(mR(X)Q(X) + (X - a)R'(X)Q(X) - (X - a)R(X)Q'(X))$ , donc  $a$  est un zéro d'ordre  $(m - 1)$  de  $F'$ .

2. Soit  $a$  un pôle de  $F$  de multiplicité  $m$ . On a :  $P(X) \neq 0$  et  $Q(X) = (X - a)^m T(X)$  avec  $T(a) \neq 0$ . Alors :

$$F'(X) = \frac{(X - a)P'(X)T(X) - mP(X)T'(X) - (X - a)P(X)T''(X)}{(X - a)^{m+1} (T(X))^2}$$

Le nombre  $a$  n'est pas racine de  $(X - a)P'(X)T(X) - mP(X)T'(X) - (X - a)P(X)T''(X)$ , donc  $a$  est un pôle de multiplicité  $(m + 1)$  de  $F$ .

**Exercice.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples  $x_1, \dots, x_n$ .

1. Former la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  de la fraction rationnelle  $F = \frac{1}{P}$ .  
En déduire que si  $P(0) \neq 0$ , alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

2. Former la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  de la fraction rationnelles  $G = \frac{P''}{P}$  (On supposera que les racines de  $P$  n'annulent pas  $P''$ ).  
En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

**Remarque 1.** Supposer que les racines  $P$  n'annulent pas  $P''$  peut sembler superflue, à première vue, puisque les racines sont simples. Attention! Tout ce qu'implique que les racines sont simples, est que les racines n'annulent pas  $P'$ , mais on ne sait rien sur  $P''$ . Prenons par exemple les polynômes de la forme  $P(X) = X(a + X^2 Q(X))$  ont 0 pour racine simple et pourtant  $P''(X) = X(6Q(X) + 6XQ'(X) + X^2 Q''(X))$ , donc  $P''(0) = 0$ . Vous allez bien sûr répondre, à raison (toujours *a priori*) que  $P$  n'est pas scindé à racine simple. Prenons alors,  $a = -1$  et  $Q(X) = 1$ , alors  $P(X) = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$ , donc scindé à racines simples avec  $P''(0) = 0$ . Ainsi, pour ce polynôme, la démonstration donnée en correction, est fautive. Cependant, vous pouvez le vérifier, la propriété reste vraie (pour ce polynôme).

1. Le polynôme  $P$  s'écrit sous la forme :

$$P(X) = \alpha \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . On obtient donc :

$$F(X) = \frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

où  $\lambda_k = \frac{1}{P'(x_k)}$  pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Si  $P(0) \neq 0$ , on obtient donc le résultat annoncé par :

$$F(0) = \frac{1}{P(0)} = -\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x_k} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

2. On a de manière analogue :

$$G(X) = \frac{P''(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} \frac{1}{X - x_k}$$

La fraction rationnelle  $H(X) = XG(X)$  est de degré  $n - 2 - n = -2 < 0$ . D'où, d'une part,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = 0$ . D'autre part, en

reprenant l'expression précédente  $H(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} \frac{X}{X - x_k}$ ,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$ . D'où le résultat annoncé.

**Exercice.** Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ .

1. Soit  $a$  un zéro d'ordre  $m \geq 1$  de  $F$ . Démontrer que  $a$  est un zéro d'ordre  $(m - 1)$  de  $F'$ .  
2. Comparer les pôles de  $F$  et de  $F'$ , ainsi que leurs ordres de multiplicité respectifs.

Notons  $\frac{P}{Q}$  le représentant irréductible de  $F$ .

1. Soit  $a$  une racine de  $P$  multiplicité  $m \geq 1$ . On a :  $P(X) = (X - a)^m R(X)$  avec  $R(a) \neq 0$  et  $Q(a) \neq 0$ .

$$F'(X) = \frac{(X - a)^{m-1} (mR(X)Q(X) + (X - a)R'(X)Q(X) - (X - a)R(X)Q'(X))}{(Q(X))^2}$$

Le nombre  $a$  n'est pas racine de  $(mR(X)Q(X) + (X-a)R'(X)Q(X) - (X-a)R(X)Q'(X))$ , donc  $a$  est un zéro d'ordre  $(m-1)$  de  $F'$ .

2. Soit  $a$  un pôle de  $F$  de multiplicité  $m$ . On a :  $P(a) \neq 0$  et  $Q(X) = (X-a)^m T(X)$  avec  $T(a) \neq 0$ . Alors :

$$F'(X) = \frac{(X-a)P'(X)T(X) - mP(X)T(X) - (X-a)P(X)T'(X)}{(X-a)^{m+1} (T(X))^2}$$

Le nombre  $a$  n'est pas racine de  $(X-a)P'(X)T(X) - mP(X)T(X) - (X-a)P(X)T'(X)$ , donc  $a$  est un pôle de multiplicité  $(m+1)$  de  $F$ .

**Exercice.**

1. Soit  $F = \frac{P}{Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que  $F$  est paire si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont pairs.

2. Établir un résultat analogue pour  $F$  impaire.

1. Si  $P$  et  $Q$  sont pairs, il est évident que  $F$  est pair. Supposons que  $F$  est pair. Nous avons alors  $F(-X) = \frac{P(-X)}{Q(-X)} = F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ , ce qui donne  $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ . Donc  $P(X)$  divise  $P(-X)Q(X)$ . Or  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss,  $P(X)$  divise  $P(-X)$ . Les degrés des deux polynômes étant égaux, nous avons  $P(X) = \lambda P(-X)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . En identifiant les coefficients dominants, on trouve  $\lambda = (-1)^n$  (avec  $n = \deg(P)$ ).

En reportant dans l'égalité plus haut, nous obtenons après simplification par  $P(-X)$ ,  $Q(X) = \lambda Q(-X) = (-1)^n Q(-X)$ . Ainsi  $P$  et  $Q$  ont tous les deux la parité de  $n$ . S'ils sont tous les deux impairs, alors  $P(0) = 0 = Q(0)$ . Dans ce cas  $P$  et  $Q$  ont une racine commune (0) ce qui contredit l'hypothèse que  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux. En conclusion ils sont tous les deux pairs.

2. Il est clair encore une fois que si  $P$  et  $Q$  sont de parité contraire, alors  $F$  est impair. Réciproquement, en reprenant le même raisonnement, nous avons  $P(-X)Q(X) = -P(X)Q(-X)$ , donc  $P(X)$  divise  $P(-X)$  et  $P(X) = (-1)^n P(-X)$ . En reportant dans l'égalité, nous obtenons cette fois  $Q(X) = -(-1)^n Q(-X) = (-1)^{n+1} Q(-X)$ . Donc  $P$  est de la parité de  $n$  et  $Q$  de la parité de  $n+1$ , donc parité contraire de  $P$ .

Donc  $F$  est impair si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont de parité opposée.

**Exercice.** On pose  $P = a(X-x_1) \cdots (X-x_n)$  où les  $x_i$  sont des complexes non nécessairement deux à deux distincts et  $a$  est un complexe non nul.

- Déterminer la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .
- Une application : déterminer tous les polynômes divisibles par leur dérivées.

1. Nous savons que si  $F = \frac{P}{Q}$ , alors le coefficient correspondant à un pôle simple  $\alpha$  vaut  $a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ . Ici, les racines ne sont pas forcément simple, mais nous savons que si  $\alpha_i$  est une racine de multiplicité d'ordre  $m_i$  de  $P$ , alors c'est une racine d'ordre  $m_i - 1$  de  $P'$ , ainsi, c'est un pôle simple de  $\frac{P'}{P}$ . Finalement,  $F(X) = \frac{P'(X)}{P(X)}$  ne possède que des pôles simples. D'où en appliquant la formule précédente :  $a_i = \frac{P'(x_i)}{P(x_i)} = 1$ . D'où

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X-x_k}$$

**Remarque 2.** Nous pouvons voir ici une « dérivée logarithmique » :  $P(X) = a \prod_{i=1}^n (X-x_i)$ , d'où  $\ln(P(X)) = \ln(a) + \sum_{i=1}^n \ln(X-x_i)$  (formellement, c'est-à-dire que l'on ne s'occupe pas des signes éventuellement négatifs...). En dérivant, on obtient

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X-x_i}$$

2. Si  $P'$  divise  $P$ , alors  $P = P'Q$  avec  $\deg(Q) = 1$ . Donc  $Q(X) = bX + c$  et  $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{bX+c} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X-x_k}$ . Cette égalité n'est possible que si  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = -\frac{c}{b}$ . Donc  $P$  possède une unique racine de multiplicité  $n$ . Réciproquement, les polynômes de la forme  $P(X) = a(X-x_1)^n$  vérifient la propriété.

Méthode alternative (sans utiliser les décompositions en éléments simple :

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  une éventuelle solution. Si  $\deg(P) \leq 0$ , alors la seule solution est clairement  $P = 0$ . Supposons que  $\deg(P) = n \geq 1$ . Alors il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $nP(X) = (X-a)P'(X)$  (par considération des termes dominants et en tenant compte de  $\deg(P') = n-1$ ). On a alors deux méthodes d'analyse.

**1<sup>re</sup> méthode :** En dérivant la relation précédemment obtenue, on obtient :

$$nP'(X) = P'(X) + (X-a)P''(X)$$

Soit aussi :  $(n-1)P'(X) = (X-a)P''(X)$ . En dérivant à nouveau cette relation, on obtient :

$$(n-1)P''(X) = P''(X) + (X-a)P^{(3)}(X)$$

Soit aussi :  $(n-2)P''(X) = (X-a)P^{(3)}(X)$ . En poursuivant ainsi, on obtient finalement :

$$P^{(n-1)}(X) = (X-a)P^{(n)}(X)$$

Or,  $\deg(P) = n \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, P^{(n)}(X) = \lambda n!$ . Donc  $P^{(n-1)}(X) = \lambda n!(X-a)$ .

On a donc finalement, en remontant les calculs précédents :  $n!P(X) = \lambda n!(X-a)^n$ . D'où

$$P(X) = \lambda(X-a)^n$$

(Remarque :  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $P$ .)

**2<sup>de</sup> méthode** : Appliquons la formule de Taylor à  $P$  en  $a$  :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

On a donc aussi :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} k(X-a)^{k-1}$$

et par conséquent :

$$(X-a)P'(X) = \sum_{k=1}^n \frac{kP^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

La condition  $nP(X) = (X-a)P'(X)$  est donc équivalente à :

$$nP(X) = n \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = nP(a) + n \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \sum_{k=1}^n \frac{kP^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Il en résulte par identification :  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, nP^{(k)}(a) = kP^{(k)}(a)$ ; d'où aussi :  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ . Il en résulte que  $a$  est une racine d'ordre  $n$  de  $P$  et comme  $\deg(P) = n$ , c'est la seule :

$$\exists (a; \lambda; n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*, P(X) = \lambda(X-a)^n$$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que tous les polynômes de la forme précédente sont solution.

**Exercice.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la valeur de chacune des somme suivantes en fonction de  $n$  :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. On a :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2. Observons que :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$$

Notons alors :

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}S - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}S - \left( S - 1 + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( S - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} \end{aligned}$$

3. Nous avons déjà travaillé la factorisation du polynôme  $X^4 + X^2 + 1$ . Les racines complexes sont  $\pm j$  et  $\pm j^2$ . La factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  est alors  $(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ .

La décomposition en éléments simples nous donne alors

$$\frac{X}{X^4 + X^2 + 1} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{X^2 + X} - \frac{1}{X^2 - X + 1} \right)$$

De plus, on remarque que  $X^2 - X + 1 = (X - 1)^2 + (X - 1) + 1$  Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + k^2 + 1} &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k + 1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - k + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k + 1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k + 1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) \end{aligned}$$

**Exercice.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer la dérivée  $n$ -ième de la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)}$$

Observons que la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$  est :

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2} \frac{1}{X - i} - \frac{1}{2} \frac{1}{X + i}$$

D'une manière générale :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{d^n}{dX^n} \left( \frac{1}{X - a} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(X - a)^{n+1}}$$

On peut en déduire :

$$F^{(n)}(X) = (-1)^n n! \left( \frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1}{2(X - i)^{n+1}} - \frac{1}{2(X + i)^{n+1}} \right)$$

On peut ensuite obtenir comme suit l'expression de  $F^{(n)}(X)$  dans  $\mathbb{R}(X)$ , au moyen de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(X - i)^{n+1}} - \frac{1}{2(X + i)^{n+1}} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{(X + i)^{n+1} + (X - i)^{n+1}}{(X - i)^{n+1}(X + i)^{n+1}} \right) \\ &= -\frac{1}{2(X^2 + 1)^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} i^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} i^k (-1)^k \right) \\ &= -\frac{1}{2(X^2 + 1)^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} i^k (1 + (-1)^k) \right) \\ &= -\frac{1}{2(X^2 + 1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2p} X^{n+1-2p} i^{2p} \times 2 \right) \\ &= \frac{1}{(X^2 + 1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2p} (-1)^{p+1} X^{n+1-2p} \right) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$F^{(n)}(X) = (-1)^n n! \left( \frac{1}{X^{n+1}} + \frac{1}{(X^2 + 1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2p} (-1)^{p+1} X^{n+1-2p} \right) \right)$$

**Exercice.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{1}{X^2 + 1}$$

1. Exprimer la dérivée  $n$ -ième de  $F(X)$ .
2. Démontrer qu'il existe  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}$$

3. Déterminer les racines de  $P_n$ .

1. Observons que :

$$F(X) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right)$$

D'une manière générale :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{d^n}{dX^n} \left( \frac{1}{X-a} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(X-a)^{n+1}}$$

On peut alors en déduire :

$$F^{(n)}(X) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left( \frac{1}{(X-i)^{n+1}} - \frac{1}{(X+i)^{n+1}} \right)$$

2. Il en résulte de ce qui précède que :

$$F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}$$

avec :

$$P_n(X) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left( (X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1} \right) \in \mathbb{C}_n[X]$$

Mais comme il est clair que  $\overline{P_n} = O_n$ , on en déduit que  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ . La formulation explicite de  $P_n$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  peut être déterminée comme dans l'exercice ?? avec la formule du binôme :

$$P_n(X) = (-1)^n n! \left( \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p} (-1)^{p+1} \right)$$

3. Pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{n+1} = (x-i)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{x+i}{x-i} \in \mathbb{U}_{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

On a ainsi trouvé  $n$  racines réelles au polynôme  $P_n$ , c'est-à-dire autant que son degré.

On les a donc toutes trouvées ainsi.

### Exercice.

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $X^3 - 1$  par  $X^2 + 1$  à l'ordre 3.

2. En déduire une primitive de  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^4(x^2 + 1)}$ .

1. Nous avons  $X^3 - 1 = (1 + X^2)(-1 + X^2 + X^3) - (X^4 + X^5)$ .

2. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 1}{x^4(x^2 + 1)} &= \frac{-1 + x^2 + x^3}{x^4} - \frac{x^4 + x^5}{x^4(x^2 + 1)} \\ &= -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2+1} \\ &= -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Les primitives de  $f$  sont donc  $F : x \mapsto \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \ln(|x|) - \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + cste$ .

### Exercice.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur des intervalles convenables :

1.  $f : x \mapsto \frac{x^5+2}{x^2(x^2-1)}$

2.  $g : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$

1. Après division euclidienne, on obtient qu'il existe  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$\frac{X^5 + 2}{X^2(X^2 - 1)} = X + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}$$

On trouve après les calculs usuels :  $a = 0$ ;  $b = -2$ ;  $c = \frac{3}{2}$ ;  $d = -\frac{1}{2}$ . Par conséquent :

$$\int f(x) dx = \int \left( x - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \ln(|x-1|) - \frac{1}{2} \ln(|x+1|) + cste$$

(sur tout intervalle ne contenant ni 0, ni 1, ni -1)

2. La fonction  $g$  étant déjà sous forme décomposée dans  $\mathbb{R}$ , il va falloir passer dans  $\mathbb{C}$ . Commençons par observer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Il en résulte :

$$\int g(x) dx = -\frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

Pour calculer l'intégrale restante, nous allons passer dans  $\mathbb{C}$  avant de revenir à  $\mathbb{R}$ . Nous savons que :

$$\exists (a; b; c; d) \in \mathbb{C}^4, H(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{\bar{b}}{(X+i)^2}$$

En considérant  $(X-i)^2 H(X)$  avec  $X=i$ , on obtient :  $b = -\frac{1}{4} = \bar{b}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} H(X) - \left( -\frac{1}{4(X-i)^2} - \frac{1}{4(X+i)^2} \right) &= \frac{1}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(X+i)^2} = \frac{1}{2(X^2+1)} \\ &= \frac{(a+\bar{a})X + i(a-\bar{a})}{X^2+1} \end{aligned}$$

D'où :  $\begin{cases} a+\bar{a} = 0 \\ i(a-\bar{a}) = \frac{1}{2} \end{cases}$  ; c'est-à-dire encore :  $a = -\frac{1}{4}i$ . On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X^2+1)^2} &= -\frac{i}{4(X-i)} + \frac{i}{4(X+i)} - \frac{1}{4(X-i)^2} - \frac{1}{4(X+i)^2} \\ &= \frac{1}{2(X^2+1)} - \frac{1}{4(X-i)^2} - \frac{1}{4(X+i)^2} \end{aligned}$$

(Nous sommes revenu sur  $\mathbb{R}(X)$  pour la première fraction rationnelle car, d'une part, cela donne une fraction que l'on sait intégrer, d'autre part, cela évite de se retrouver à la fin avec du  $\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$  que nous n'aurions pas su ramener dans  $\mathbb{R}$ .)

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{4(x-i)} + \frac{1}{4(x+i)} + cste \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctan}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + cste \end{aligned}$$

On peut donc conclure :

$$\int g(x) dx = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + cste = \frac{1}{2} \left( \text{Arctan}(x) + \frac{x-2}{x^2+1} \right) + cste$$