Logique et raisonnement

TD

Proposition de correction

Exercice. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences suivantes

1. $\text{NON}\,(\text{NON}\,(P)) \Leftrightarrow P$
2. $(P \text{ ET } P) \Leftrightarrow P$
3. $(P \text{ OU } P) \Leftrightarrow P$
4. $(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P)$
5. $(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ OU } P)$
6. $(P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } Q) \text{ ET } R)$
7. $(P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ OU } R)$
8. $\text{NON}\,(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(P) \text{ OU } \text{NON}\,(Q))$
9. $\text{NON}\,(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(P) \text{ ET } \text{NON}\,(Q))$
10. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P))$
11. $(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R))$
12. $(P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R))$
13. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(P) \text{ OU } Q)$
14. $\text{NON}\,(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ET } \text{NON}\,(Q))$
15. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(Q) \Rightarrow \text{NON}\,(P))$
16. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(P) \Leftrightarrow \text{NON}\,(Q))$
17. $(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (\text{NON}\,(P) \Rightarrow Q)$

Nous allons toutes les démontrer en remplissant une table de vérité.

P	Q	NON (P)	NON (NON (P))	P ET P	P OU P	P ET Q	Q ET P	P OU Q	Q OU P	NON (P ET Q)	NON (P) OU NON (Q)	NON $(Q) \Rightarrow$ NON (P)
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V

NON (P OU Q)	NON (P) ET NON (Q)	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow P)$	NON (P) OU Q	NON $(P \Rightarrow Q)$	P ET NON (Q)	NON $(P) \Leftrightarrow$ NON (Q)	NON $(P) \Rightarrow Q$
F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F

P	Q	R	Q ET R	P ET (Q ET R)	P ET Q	(P ET Q) ET R	P OU (Q OU R)	P OU Q	(P OU Q) OU R	P OU (Q ET R)	P OU R
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

P	Q	R	(P OU Q) ET (P OU R)	P ET R	Q OU R	P ET (Q OU R)	(P ET Q) OU (P ET R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est l'application nulle.
2. f n'est pas l'application nulle.
3. La fonction f s'annule.
4. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
5. f est une fonction constante.
6. La fonction f n'est pas une fonction constante.
7. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
8. La fonction f présente un minimum.
9. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
10. f est une fonction affine.

1. $\forall x \in I,\ f(x) = 0$
2. $\exists x \in I,\ f(x) \neq 0$
3. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
5. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = y$ ou $\forall x_1 \in I,\ \forall x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2)$
6. $\exists (x_1\,; x_2) \in I^2,\ f(x_1) \neq f(x_2)$
7. $\forall (x_1\,; x_2) \in I^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
8. $\exists x_1 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_1)$
9. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \geq A$
10. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Exercice. Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geq 3$
2. $0 < x \leq 2$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$
7. P ET NON (Q)
8. P ET $(Q$ ET $R)$
9. P OU $(Q$ ET $R)$
10. $(P$ ET $Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
11. « Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».
12. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
13. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
14. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x+1$
15. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x-7| < \varepsilon)$

1. $x < 3$
2. $(x \leq 0$ OU $x > 2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$
7. NON (P) OU Q équivalent à $P \Rightarrow Q$
8. NON (P) OU (NON (Q) OU NON (R))
9. NON (P) ET (NON (Q) OU NON (R))
10. $(P$ ET $Q)$ ET (NON $(R \Rightarrow S)$) équivalent à P ET Q ET $(R$ ET NON $(S))$ c'est-à-dire P ET Q ET R ET NON (S)
11. « Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans ».
12. « Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit ».
13. « Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire ».
14. Il existe un entier x tel que pour tout entier y, il existe un entier z tel que l'on a à la fois $z < x$ et $z \geq x+1$.
15. Même si l'on ne comprend rien à la phrase, la mécanique de construction de la négation est toujours la même : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ (|x - \frac{7}{5}| < \alpha$ ET $|5x-7| \geq \varepsilon)$

Exercice. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$)

1. $x \in \mathbb{R};\ x^2 = 4\ \ldots\ldots\ x = 2$
2. $z \in \mathbb{C};\ z = \overline{z}\ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R};\ x = \pi\ \ldots\ldots \mathrm{e}^{2ix} = 1$

1. $x \in \mathbb{R};\ x^2 = 4\ \Leftarrow\ x = 2$
2. $z \in \mathbb{C};\ z = \overline{z}\ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R};\ x = \pi\ \Rightarrow \mathrm{e}^{2ix} = 1$

Exercice. Reprendre l'exercice **??** en donnant à chaque fois les négations en toutes lettres et avec les quantificateurs.

1. $\exists x,\ \exists y,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Il existe un individu qui n'a pas vu au moins un film.
2. $\forall x,\ \exists y,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Pour tous les individus, il existe un film qui n'a pas été vu (personne n'a vu tous les films).
3. $\forall y,\ \exists x,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Pour tous les films, il existe un individu qui ne l'a pas vu (Aucun film n'a été vu par tout le monde).
4. $\exists x,\ \forall y,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Il existe un individu qui n'a vu aucun film.
5. $\forall x,\ \forall y,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Aucun individu n'a vu de film.
6. $\forall y,\ \forall x,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Aucun film n'a été vu (identique à la précédente).
7. $\exists y,\ \forall x,$ NON $(\mathscr{P}(x,y))$ — Il existe un film qui n'a été vu par aucun individu.

Exercice. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

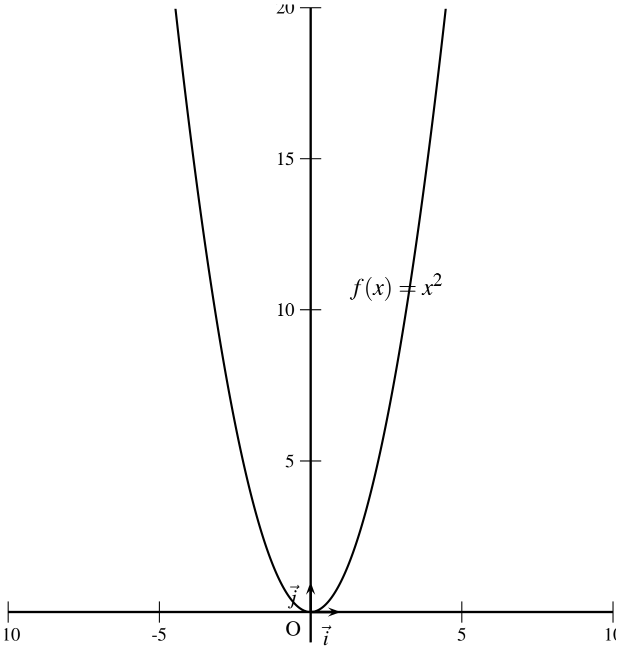
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geq 3$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4. $\exists n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \geq 100$

1. Faux, en effet, $\exists x \in \mathbb{R}\ x > 2$ ET $x < 3$. Il suffit de prendre $x = 2.5$. Puisque la négation est vraie, la phrase est fausse.
2. Vrai. On distingue 2 cas. Premier cas, $0 < x < y$, donne en divisant par $x > 0$, $0 < 1 < \frac{y}{x}$, puis par $y > 0$, $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. Deuxième cas, $x < y < 0$, donne en divisant par $x < 0$ (attention, changement de sens des inégalités !), $1 > \frac{y}{x} > 0$, puis par $y < 0$ (deuxième changement de sens), $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$.
3. Vrai, il suffit de prendre $x = 0.25$, $\sqrt{x} = 0.5$.
4. Vrai, il suffit de prendre $n = 100$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des propositions suivantes, donner graphiquement à main levée un exemple de fonction f NE la vérifiant PAS.

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ OU $f(x) \leq -1$

Une courbe qui répond aux trois questions est la courbe représentative de la fonction carré.



Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$(f \text{ impaire}) \Rightarrow (f(0) = 0)$$

Nous allons faire un raisonnement direct. Puisque f est impaire, on peut écrire que pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $f(0) = -f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

Exercice.

1. Soit n un entier, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.
3. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Montrons cette propriété par contraposition : n impair $\Rightarrow n^2$ impair. Puisque l'on part de l'hypothèse que n est impair, il s'écrit sous la forme $n = 2p+1$. Ainsi, $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2+p)+1$ est impair.

   Remarque 1. On montre de même que si n^2 est impair, alors n est impair. En conclusion, n et n^2 ont la même parité.

2. Nous allons raisonner par contraposée. Supposons que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, cela veut dire qu'il existe deux entiers (relatifs) p et q tel que $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ (fraction non nécessairement irréductible). En élevant cette égalité au carré, nous avons alors $x = \frac{p^2}{q^2}$ qui est le quotient de deux entiers (naturels), donc un rationnel. Nous avons montré : $\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$.
3. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible et où p et q sont bien évidemment des entiers (relatifs, non nul dans le cas de q). En élevant l'égalité au carré, on obtient que $2 = \frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair. D'après l'exercice **??**, nous pouvons conclure que p est pair. Il s'écrit donc $p = 2p'$ et $p^2 = 4p'^2$. Il en résulte, après division par 2 de l'égalité, que $q^2 = 2p'^2$, c'est-à-dire que q^2 et pair et donc q aussi. Au final, p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait que $\frac{p}{q}$ était irréductible. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice. Soit x un réel positif. Montrer que
$$(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$$

On raisonne par contraposition. Rappelons que la négation de $(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon)$ est $(\exists \varepsilon > 0,\ x \geq \varepsilon)$. Supposons $x \neq 0$, on a alors $x > 0$. En prenant $\varepsilon = \frac{x}{2}$, on a $\varepsilon > 0$ et $x > \varepsilon$. On a donc trouvé un ε qui contredit la première proposition (contre-exemple).

Autre méthode : on pose $E = \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des minorants de E est $\mathbb{R}_-$. La première proposition est équivalente à x est un minorant de E. Or $x \geq 0$. Donc $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$.

Exercice. Soit a et b deux réels. Montrer en utilisant deux méthodes que $(a+b \geq 1) \Rightarrow \left(a \geq \frac{1}{2} \text{ OU } b \geq \frac{1}{2}\right)$.

1. La première démonstration va se faire par contraposition. Nous allons donc montrer que $\left(a < \frac{1}{2} \text{ ET } b < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (a+b < 1)$. En fait cette implication est évidente, il suffit d'additionner les deux inégalités strictes de gauche pour obtenir celle de droite.
2. La seconde démonstration va utiliser une méthode qui n'a pas été vue en cours, mais que l'on a déjà rencontrée : la disjonction de cas. Deux cas sont possibles :
   — Si $a \geq \frac{1}{2}$ alors on a bien $a \geq \frac{1}{2}$ OU $b \geq \frac{1}{2}$.
   — Si $a < \frac{1}{2}$ alors $-a > -\frac{1}{2}$. De plus $a+b \geq 1 \Rightarrow b \geq 1-a$. D'où $a+b \geq 1 \Rightarrow b > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On a donc bien $a \geq \frac{1}{2}$ OU $b \geq \frac{1}{2}$.

   Puisque l'on a épuisé toutes les valeurs possibles pour a, et qu'à chaque fois on avait $a \geq \frac{1}{2}$ OU $b \geq \frac{1}{2}$, on peut en conclure que $(a+b \geq 1) \Rightarrow \left(a \geq \frac{1}{2} \text{ OU } b \geq \frac{1}{2}\right)$.

Exercice. Soit a et b deux réels. Montrer que $\left(a^2+b^2 = 0\right) \Rightarrow (a = b = 0)$;

Tout d'abord commençons par ré-écrire la double égalité du membre de droite : $(a = 0 \text{ ET } b = 0)$. Voyons maintenant deux méthodes.

— Par contraposition : la contraposée de l'implication est $(a \neq 0 \text{ OU } b \neq 0) \Rightarrow \left(a^2+b^2 \neq 0\right)$. Vu la symétrie du problème en a et b, on peut supposer que $a \neq 0$ sans perdre en généralité. Puisque $a \neq 0$, nous avons $a^2 > 0$. Or $b^2 \geq 0$, ainsi $a^2+b^2 > 0$. Nous avons donc $a^2+b^2 \neq 0$.

— Par l'absurde : Supposons que $a^2+b^2 = 0$ et que $(a \neq 0 \text{ OU } b \neq 0)$. La première égalité nous donne que $b^2 = -a^2$. Puisque l'on a supposé que a était non nul, cela veut dire que $-a^2$ est strictement négatif. Donc $b^2 < 0$ ce qui est absurde (à moins d'être un nombre complexe).

Exercice. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :

1. La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.
2. La somme et le produit d'un nombre rationnel (non nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.
3. Un rectangle a pour aire $170\,\mathrm{m}^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13\,\mathrm{m}$.

1. Supposons que l'on ait un nombre irrationnel $a > 0$ tel que sa racine carrée soit rationnelle. Nous pouvons donc écrire $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers. En élevant au carré nous avons alors $a = \frac{p^2}{q^2}$. Or p et q étant entiers, leurs carrés aussi et le rapport des carrés est rationnel. Ce qui contredit l'irrationalité de a.
   Ce raisonnement ressemble beaucoup à un raisonnement par contraposition puisque nous utilisons l'irrationalité de a seulement à la fin. Or dans l'énoncé on ne voit aucune implication. Ne serait-elle pas cachée ? Si bien sûr ! L'énoncé nous demande de démontrer que $\forall a > 0,\ (a \text{ irrationnel}) \Rightarrow (\sqrt{a} \text{ irrationnel})$ et nous avons montré la contraposée : $\forall a > 0,\ (\sqrt{a} \text{ rationnel}) \Rightarrow (a \text{ rationnel})$.
2. Supposons que l'on ait deux nombres, l'un rationnel r, et l'autre irrationnel s, tels que leur somme soit rationnelle : $r+s = r_1 \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas on peut écrire que $s = r_1 - r$. Or la somme (et la différence) de deux nombres rationnels est rationnelle, donc $s \in \mathbb{Q}$. Ce qui contredit le fait que s est irrationnel.
   En ce qui concerne le produit, la démonstration est la même. Bien évidemment, le nombre rationnel doit être non nul puisque le produit de 0 par n'importe quel réel donne 0 (un rationnel donc).
   Là encore, nous avons en réalité fait une démonstration par contraposition. Cette fois l'implication est plus subtile. L'énoncé demande de montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall s \in \mathbb{R},\ (s \text{ irrationnel}) \Rightarrow (r+s \text{ irrationnel})$ et nous avons montré la contraposée : $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall s \in \mathbb{R},\ (r+s \text{ rationnel}) \Rightarrow (s \text{ rationnel})$.

3. Vous l'avez compris, l'auteur original de cet énoncé (un professeur de mathématiques dans une université française) confond les raisonnements par l'absurde et les raisonnements par contraposition. Nous n'allons donc pas suivre les consignes de l'énoncé et faire directement une démonstration par contraposition. Exhibons d'abord l'implication cachée dans l'énoncé. On doit montrer que $\forall l \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall L \in [l\,;+\infty[,\ l \times L = 170 \Rightarrow L > 13$. Nous allons montrer la contraposée : $\forall l \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall L \in [l\,;+\infty[,\ L \leq 13 \Rightarrow l \times L \neq 170$.
Soit donc deux réels $0 < l \leq L \leq 13$, alors par produit des inégalités, nous avons $l \times L \leq 13 \times 13 = 169$. Le produit ne peux donc pas être égal à 170. Donc forcément, $L > 13$.
En réalité nous avons même montré que $\forall\ 0 < l \leq L \in \mathbb{R},\ l \times L > 169 \Rightarrow L > 13$. Il est même aisé de généraliser à « La longueur d'un rectangle est supérieure ou égale à la racine carrée de sa surface ».

Exercice. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

Supposons que tous les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes. Alors il y aura au plus $1+1+\cdots+1 = n$ paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $(n+1)$. Donc un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

Exercice. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0;1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$)
4. Donner une preuve en utilisant le principe des tiroirs vu à l'exercice **??**.

1. La traduction directe de la propriété est
$$\exists i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \exists j \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \left((i<j)\ \text{ET}\ \left(x_j - x_i \leq \frac{1}{n}\right)\right)$$
Pour utiliser simplement les valeurs $x_i - x_{i-1}$, il suffit de remarquer que si deux nombres sont distants de moins de $\frac{1}{n}$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distants de moins de $\frac{1}{n}$. Ce qui signifie :
$$\exists i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$$
2. La négation de cette proposition est donc :
$$\forall i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n} \tag{1}$$
3. On part de l'hypothèse que la propriété de l'exercice est fausse et donc la proposition (**??**) est vraie. On écrit
$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$$
(Oui, encore une somme télescopique !)
En utilisant (**??**), on a donc :
$$x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1$$
Ce qui est absurde. La propriété initiale est donc vraie.
4. On considère n intervalles $I_1 = \left[0\,;\frac{1}{n}\right[$, $I_2 = \left[\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right[$, $\ldots$, $I_n = \left[\frac{n-1}{n}\,;1\right[$ (qui correspondent à nos n tiroirs). On veut y placer $(n+1)$ points (nos chaussettes !) Il faut obligatoirement qu'il y ait deux points dans le même intervalle. Ces deux points seront donc distants de moins de $\frac{1}{n}$.

Exercice. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

Analyse : Normalement, le premier réflexe à avoir est déjà de regarder en 0 ce qu'il se passe, et on trouve $f(0) = 1$. Puis on pourrait être tenté de passer à $\mathbb{N}$. Par une récurrence simple, on trouve $f(n) = 1$, puis passer à $\mathbb{Z}$, on montre facilement que $f(-x) = 1 - x + xf(1+x)$, donc là encore, sur $\mathbb{Z}$, $f(z) = 1$. Mais comment passer à $\mathbb{Q}$? On trouve facilement que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, mais les autres rationnels ?
Il va donc falloir changer de méthode. Le réel $f(1-x)$ apparait dans la formule, nous allons donc l'utiliser en appliquant la formule à $y = 1-x$: $f(y) + yf(1-y) = 1 + y = f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = f(1-x) + (1-x)f(x) = 1 + 1 - x = 2 - x$. Or $f(x) = 1 + x - xf(1-x)$, donc en injectant dans l'égalité précédente, nous avons $2 - x = f(1-x) + (1-x)(1 + x - xf(1-x)) = f(1-x)(1 - x(1-x)) + (1-x)(1+x)$, soit après simplification $f(1-x)(x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1$. Or le discriminant du polynôme $x^2 - x + 1$ étant strictement négatif, le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous pouvons donc simplifier l'équation pour obtenir $f(x) = 1$.
La solution possible (mais ce n'est peut-être pas une solution) est donc la fonction constante $x \mapsto f(x) = 1$.

Synthèse : Il est très simple de vérifier que la fonction constante $x \mapsto f(x) = 1$ est bien solution de l'équation.

L'unique solution de cette équation est donc la fonction constante $x \mapsto f(x) = 1$.

Exercice. Deux joueurs s'affrontent sur le jeu suivant. Ils disent chacun leur tour un nombre entre 1 et 7. Les nombres sont additionnés et dès que le cumul des nombres qu'ils ont proposés vaut 100 , le jeu est fini. Le joueur qui a atteint 100 et a donc parlé en dernier gagne.
Comment jouer ?

Analyse : Nous allons trouver la réponse de manière naturelle, en partant de l'objectif qui est d'atteindre 100. Si je veux atteindre 100, il faut que mon adversaire ait atteint un nombre entre 93 (auquel cas je dirai 7) et 99 (auquel cas je dirai 1). Pour obtenir cela, il suffit que j'atteigne 92 à l'étape précédente. Mais pour atteindre 92 à coup sûr, j'ai besoin que mon adversaire ait atteint un nombre entre 85 (auquel cas je dirai 7) et 91 (auquel cas je dirai 1). Pour cela, il faudrait que j'atteigne 84 à l'étape précédente.
On reproduit le raisonnement et on réalise que pour gagner, il suffit que j'arrive à atteindre à l'étape précédente $84-8=76$, donc juste avant $76-8=68$, et ainsi de suite 60, 52, 44, 36, 28, 20, 12 et 4. On observe ici une suite arithmétique de raison 8.

Synthèse : Nous sommes partis du résultat (la victoire) pour remonter au début de la partie et voir comment la jouer. Nous pouvons maintenant donner la stratégie gagnante, en respectant les règles du jeu.

— Si je commence, je dis 4, puis mon adversaire va porter le cumul à un nombre entre 5 et 11, et je dis le chiffre qu'il faut pour atteindre 12, puis 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 74, 82, et enfin 100.

— Si mon adversaire commence et connaît cette stratégie, je perdrai. Mais sinon, je peux la « rattraper » : dès que je peux je dis le chiffre me permettant de retomber sur 4 ou 12 ou 20... Si il commence par 1, 2, 3, 5, 6 ou 7, je réponds par 3, 2, 1, 7, 6, 5. S'il commence par 4, je réponds par 1 et attends de voir ce qu'il dit. S'il dit 1, 2, 3, 4, 5, ou 6, j'atteins 12 avec 7, 6, 5, 4, 3, 2. Mais s'il répond 7, je recommence à dire 1 et attends le tour suivant pour atteindre 20 etc. S'il répond tout le temps 7, c'est qu'il avait compris la stratégie et je perds.

Exercice. Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \frac{x+1}{2x-1} \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $f(x) = y$.
Nous allons voir deux méthodes.

Analyse-synthèse :

Analyse : Supposons que l'on a trouvé x tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-1} &= y \\ x+1 &= y(2x-1) \\ 1+y &= x(2y-1) \\ x &= \frac{1+y}{2y-1} \end{aligned}$$

Maintenant que l'on a identifié x en fonction de la donnée de l'énoncé y, on peut passer à la synthèse.

Synthèse : Soit $y \neq \frac{1}{2}$. Alors $2y-1 \neq 0$ et nous pouvons poser

$$x = \frac{1+y}{2y-1}$$

Vérifions d'abord que $x \neq \frac{1}{2}$. Pour cela nous allons faire un raisonnement par l'absurde en supposant que $x = \frac{1}{2}$. Alors

$$\frac{1}{2} = \frac{1+y}{2y-1} \Rightarrow 2y-1 = 2+2y \Rightarrow -1 = 2$$

Ce qui est absurde.
Puisque $x \neq \frac{1}{2}$ nous pouvons calculer $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{1+y}{2y-1}+1}{2\frac{1+y}{2y-1}-1} = \frac{1+y+(2y-1)}{2(1+y)-(2y-1)} = \frac{3y}{3} = y$$

Donc il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $f(x) = y$.

Tableau de variations : Avec un tableau de variations on peut « voir » qu'à toute ordonnée $y \neq \frac{1}{2}$ on peut faire correspondre (au moins) un antécédent. Pour cela on calcule la dérivée de f. Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{(2x-1)-(x+1)2}{(2x-1)^2} = -\frac{3}{(2x-1)^2} \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On voit alors que pour tout $y \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, il existe $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ tel que $f(x) = y$. De même, pour $y \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, il existe $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ tel que $f(x) = y$. En fait, pour faire une preuve rigoureuse il faut préciser que f est continue sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et $f(x) \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$ quand $x \to \frac{1}{2}^-$. De même pour l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires (vu en terminale par les S) assure alors que toute valeur de $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ admet un antécédent par f. Remarquons que si f n'était pas continue sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, nous ne pourrions pas conclure car f pourrait « sauter » certaines valeurs.

Exercice. Un vol a été commis dans un asile. Trois pensionnaires A, B et C sont suspects. Voici leurs témoignages, chacun formulant trois assertions :

A : Je suis innocent. À l'heure du vol, j'étais avec B. C'est C le coupable.
B : Je suis innocent. A aussi. A n'était pas avec moi à l'heure du vol.
C : Je suis innocent. B aussi. A a menti trois fois.

Vous savez que chaque suspect a au moins menti une fois sur ses trois affirmations. Qui est le coupable ?

Trois coupables possibles, donc trois cas à étudier :

A coupable : A et B ne peuvent pas être ensembles à l'heure du vol puisqu'il n'y a qu'un coupable.

Affirmations de A : F, F, F

Affirmations de B : V, F, V

Affirmations de C : V, V, V

Or C est censé mentir au moins une fois, donc A est innocent.

B coupable : A et B ne peuvent pas être ensembles à l'heure du vol puisqu'il n'y a qu'un coupable.

Affirmations de A : V, F, F

Affirmations de B : F, V, V

Affirmations de C : V, V, F

Les trois ont menti au moins une fois, donc B est potentiellement le coupable.

C coupable :

Affirmations de A : V, ?, V. La deuxième proposition est donc forcément fausse, donc A et B n'étaient pas ensembles.

Affirmations de B : V, V, ?. La troisième proposition est donc forcément fausse, donc A et B étaient ensemble. C'est en contradiction avec ce qui précède.

Affirmations de C : F, V, F

Il est impossible que A et B mentent au moins une fois. Donc C est innocent.

En conclusion, le coupable est B.

Exercice. Thomas, Jules et Yves sont partis contempler des oiseaux. Chacun a vu un oiseau que les deux autres n'ont pas vu. Chaque deux ont vu un oiseau que le troisième n'a pas vu, et un oiseau a été vu par les trois.
Parmi les oiseaux que Thomas a vus, deux sont jaunes. Parmi ceux vus par Jules, trois sont jaunes, et parmi ceux vus par Yves, quatre sont jaunes.

Combien d'oiseaux jaunes ont été vus au total ? Combien d'oiseaux non jaunes ont été vus au total ?

Nous allons remplir un tableau avec une ligne par individu et autant de colonnes que nécessaires pour les oiseaux.

	a	b	c	d	e	f	g
Thomas	V	X	X	V	V	X	V
Jules	X	V	X	V	X	V	V
Yves	X	X	V	X	V	V	V

Puisque que Yves n'a vu que quatre oiseaux et qu'il a vu au moins quatre oiseaux jaunes, on en déduit que tous ses oiseaux sont jaunes, donc c, e, f et g sont jaunes. Thomas n'a vu que deux oiseaux jaunes, donc a et d ne sont pas jaunes. Jules a vu trois oiseaux jaunes, donc b est jaunes. Au final :
5 oiseux jaunes : b, c, e, f, g et 2 non jaunes a et d.

Exercice. Démontrer par récurrence les égalités suivantes pour tout entier naturel non nul n.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

1. Nous allons faire une récurrence sur n.
   a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   b) Nous avons $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   c) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
   Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$
   Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   d) Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Nous allons faire une récurrence sur n.
   a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   b) Nous avons $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   c) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
   Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(on s'aide du résultat en vérifiant que l'on a bien

$(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6)$

Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

d) Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Nous allons faire une récurrence sur n.

a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

b) Nous avons $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{1} k\right)^2$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

c) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Nous savons déjà (grâce à une démonstration précédente) que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4))}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$
$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

d) Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

4. Dans l'hérédité, après mise au même dénominateur, on a $n(n+2)+1 = (n+1)^2$.
5. Dans l'hérédité, après mise au même dénominateur, on a $n(n+3)(n+3)+4 = (n+1)^2(n+4)$.

Exercice. Démontrer que

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a+b)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Soit a et b deux réels. Nous allons démontrer l'égalité par une récurrence sur n.

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
2. Nous avons $(a+b)^1 = a+b = a^1 \times b^0 + a^0 \times b^1 = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Nous avons supposé que $\mathcal{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{1+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1}
\end{aligned}$$

Nous avons besoin de plusieurs propriétés pour finir.

— D'après une formule vue en TD de révision (exercice **??**) à retenir, nous avons $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

— Pour tout entier n, $\binom{n}{0} = 1$. En particulier, $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$.

— Pour tout entier n, $\binom{n}{n} = 1$. En particulier, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$.

Nous pouvons donc finir notre calcul :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Donc l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Nous avons montré la formule pour deux réels a et b quelconques, nous avons donc montré :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a+b)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exercice. Démontrer que pour tout entier naturel n :

1. 3 divise $(4^n + 2)$
2. 7 divise $(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

1. Nous allons faire une récurrence sur n.
   a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par « 3 divise $(4^n + 2)$ ».
   b) Nous avons $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$, divisible par 3. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   c) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que 3 divise $4^{n+1} + 2$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $4^{n+1} + 2 = 3p$. Nous avons supposé que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc il existe un entier naturel q tel que $4^n + 2 = 3q$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
4^{n+1} + 2 &= 4 \times 4^n + 2 \\
&= 4 \times (3q - 2) + 2 \\
&= 3 \times 4q - 6
\end{aligned}$$

$$= 3 \times (4q - 2)$$

En posant $p = 4q - 2$, nous avons $4^{n+1} + 2 = 3p$.
Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

d) Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $(4^n + 2)$.

2. Nous allons faire une récurrence sur n.

   a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par « 7 divise $(3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ».

   b) Nous avons $3^1 + 2^2 = 7$, divisible par 7. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   c) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que 7 divise $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7p$. Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc il existe un entier naturel q tel que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7q$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
3^{2n+3} + 2^{n+3} &= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\
&= 9(7q - 2^{n+2}) + 2 \times 2^{n+2} \\
&= 7 \times 9q + 2^{n+2}(2 - 9) \\
&= 7(9q - 2^{n+2})
\end{aligned}$$

   En posant $p = 9q - 2^{n+2}$, nous avons $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7p$.
   Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   d) Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $(3^{2n+1} + 2^{n+2})$.

Exercice. Un élève démontre par récurrence que si l'on prend n objets, ils ont tous la même couleur. Voici sa démonstration :

> Si on prend un seul objet, il n'y a rien à prouver.
> Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On considère donc n objets, que l'on numérote de 1 à n. On forme un premier tas constitué des objets 1 à $n-1$. Il y a $n-1$ objets : par hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. On forme ensuite un second tas constitué des objets 2 à n. De même, ils ont tous la même couleur. Comme l'objet numéro 2 appartient aux deux tas, les couleurs du 1er et du 2e tas sont identiques : tous les objets ont la même couleur !

Déterminer l'erreur.

L'initialisation est vraie, l'erreur ne peut donc qu'être dans l'hérédité. L'hérédité semble correcte... Excepté qu'elle s'appuie sur le fait que la boule numéro 2 appartient aux 2 tas. Or, lorsque nous n'avons que 2 boules, l'hérédité tombe à l'eau.
Si on reprend l'analogie de l'échelle, on est capable de monter la première marche, si on est sur une marche, on est capable de monter à la suivante, sauf pour passer de la première à la deuxième !

Exercice. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$$

Nous avons déjà démontré cette égalité en TD de révision (exercice **??**). Puisque nous sommes dans le chapitre récurrence, nous allons la redémontrer avec une récurrence sur n.

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

2. Nous avons $\sum\limits_{k=1}^{1} k.k! = 1 \times 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k.k! = (n+2)! - 1$. Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k.k! &= \left(\sum_{k=1}^{n} k.k!\right) + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

   Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Exercice. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Nous allons faire une récurrence sur n.

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $n! \geq 2^{n-1}$.
2. Nous avons $1! = 1 \geq 1 = 2^{n-1}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que $(n+1) \geq 2^n$. Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geq 1$ et $(n+1) \geq 2$. Donc $(n+1)! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.
Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 1$

Au vu de la définition de la suite, une récurrence double semble s'imposer.

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 1$.
2. Nous avons $u_0 = 2 = 2^0 + 1$, $u_1 = 3 = 2^1 + 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$$

Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2 \times 2^n - 2 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 \\ &= (3-1) \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

Donc l'implication $(\mathscr{P}(n)$ ET $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

Au vu de la définition de la suite, un récurrence triple semble s'imposer.

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n(n-1)$.
2. Nous avons $u_0 = 0 = 0(-1)$, $u_1 = 0 = 1(0)$, $u_2 = 2 = 2(1)$. Donc $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.
3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+3)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que

$$u_{n+3} = (n+3)(n+2)$$

Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \\ &= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) \\ &= 3(n+2)(n+1) + n(n-1-3(n+1)) \\ &= 3(n+2)(n+1) + n(-2n-4) \\ &= 3(n+2)(n+1) - 2n(n+2) \\ &= (n+2)(3(n+1) - 2n) \\ &= (n+2)(n+1) \end{aligned}$$

Donc l'implication $(\mathscr{P}(n)$ ET $\mathscr{P}(n+1)$ ET $\mathscr{P}(n+2)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+3)$ est vraie.

4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice. Montrer par récurrence que tout entier $n \geq 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui même. Nous allons avoir besoin d'une récurrence forte.

— 2 est divisible par 2 qui est premier.

— On suppose que pour un certain $n \geq 2$, tous les entiers $2 \leq m \leq n$ sont divisibles par au moins un nombre premier. Montrons que $n+1$ est divisible par au moins un nombre premier.

  — Si $n+1$ est premier, alors il est divisible par un nombre premier (lui même).

  — Sinon, par définition, il possède un diviseur $2 \leq d < n+1$. Donc $2 \leq d \leq n$ et par hypothèse de récurrence, d possède un diviseur premier. Donc $n+1$ aussi.

Exercice. Montrer que pour tout entier naturel n, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la proposition : « $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17 ».

Initialisation : $3 \times 5^{0+1} + 2^1 = 15 + 2 = 17$ est bien divisible par 17. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, vérifions que $P(n+1)$ aussi. $3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 3 \times 25 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1}$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $3 \times 5^{2n+1} = 17p - 2^{3n+1}$, d'où $3 \times 25 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1} = 25 \times \left(17p - 2^{3n+1}\right) + 8 \times 2^{3n+1} = 25 \times 17p + 2^{3n+1}(8-25) = 17\left(25p - 2^{3n+1}\right)$. D'où $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{2^n} - 1$ est divisible par 2^{n+2}.

Exercice. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos(\theta)$, et pour $n \geq 2$, $u_n = 2u_1 u_{n-1} - u_{n-2}$. Montrer que pour tout entier n, $u_n = \cos(n\theta)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la proposition : « $u_n = \cos(n\theta)$ ». La suite (u_n) étant une suite récurrente double, nous allons faire une récurrence double !

Initialisation : $\cos(0) = 1 = u_0$, $\cos(\theta) = u_1$, Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, vérifions que $P(n+2)$ aussi. Tout d'abord $u_n = \cos(n\theta)$ et $u_{n+1} = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos(\theta)\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\right) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos^2(\theta)\cos(n\theta) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos(n\theta)\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos((n+2)\theta)
\end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.

Exercice. Déterminer une expression explicite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_{n+1} = 1 - u_n$
2. $u_{n+1} = u_n + 2n$

1. Commençons par calculer les premiers termes afin de voir ce qu'il se passe : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, etc. On remarque que l'on va avoir une alternance de 0 et de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la proposition : « $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ ».

   Initialisation : Nous avons vu que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ étaient vraies.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, donc $u_{n+1} = 1 - \frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{2-(1+(-1)^n)}{2} = \frac{1-(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

   Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

2. Commençons par calculer les premiers termes afin de voir ce qu'il se passe : $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 = 1$, $u_2 = u_1 + 2 = 3 = 1 + 2$, $u_3 = u_2 + 4 = u_1 + 2 + 4 = 1 + 2 + 4 = 7$, $u_4 = u_3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 6 = 13$. On voit que l'on fait à chaque fois, 1 plus la somme des nombres pairs. Or $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} = 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 1$. Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la proposition : « $u_n = n^2 - n + 1$ ».

Initialisation : $0^2 - 0 + 1 = 1 = u_0$, $1^2 - 1 + 1 = 1 = u_1$. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n\mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie. $u_{n+1} = u_n + 2n = n^2 - n + 1 + 2n = n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 1$.