

1. Logique et raisonnement

Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme donc Socrate est mortel.

(Aristote.)

Autre syllogisme : tous les chats sont mortels. Socrate est mortel. Donc Socrate est un chat.

(Le logicien, dans Le rhinocéros, E. Ionesco.)

1.1. Rudiments de logique

1.1.1. Première définition

Définition 1.1 (Proposition). On appelle *proposition* un énoncé (mathématiques) qui peut être soit vrai (noté V ou 1) soit faux (noté F ou 0).

1.1.2. Opérations

À partir d'une ou plusieurs propositions, il est possible d'en créer de nouvelles.

Définition 1.2 (Négation). Soit une proposition P . On définit la *négation de P* que l'on note « $\neg P$ » ou « \bar{P} » ou encore « NON (P) », comme la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et est fausse lorsque P est vraie.

Définition 1.3 (Conjonction). Soit deux propositions P et Q . On définit la *conjonction de P et Q* que l'on note « $P \wedge Q$ » ou « P ET Q », comme la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse lorsque au moins l'une des deux propositions P ou Q est fausse.

Définition 1.4 (Disjonction). Soit deux propositions P et Q . On définit la *disjonction de P et Q* que l'on note « $P \vee Q$ » ou « P OU Q », comme la proposition qui est vraie lorsque au moins l'une des deux propositions P ou Q est vraie, et fausse lorsque les deux propositions P et Q sont fausses.

Dans les définitions précédentes, il n'y avait pas de lien entre les deux propositions P et Q . Nous allons voir maintenant des opérations qui nous tendent un lien entre P et Q .

Définition 1.5 (Implication). Soit P et Q deux propositions. On définit la proposition P implique Q , notée $P \Rightarrow Q$, comme la proposition qui est vraie si P est fausse ou si P et Q sont toutes les deux vraies; et qui est fausse si P est vraie et Q fausse.

Définition 1.6 (Réciproque). Soit P et Q deux propositions. La *réciproque* de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est la proposition « $Q \Rightarrow P$ ».

Tout comme nous l'avons vu sur l'exemple précédent, connaître la valeur de vérité de $P \Rightarrow Q$ ne donne aucune information sur la valeur de vérité de $Q \Rightarrow P$.

Définition 1.7 (Équivalence). Soit P et Q deux propositions. On définit la proposition P équivalente à Q , notée $P \Leftrightarrow Q$, comme la proposition qui est vraie si P et Q sont vraies ou si P et Q sont fausses; et qui est fausse si l'une est fausse et l'autre vraie.

Définition 1.8 (Condition nécessaire/suffisante).

- Soit $P \Rightarrow Q$ une implication. On dit que P est une *condition suffisante* à Q , et que Q est une *condition nécessaire* à P .
- Soit $P \Leftrightarrow Q$ une équivalence. On dit que P est une *condition nécessaire et suffisante* à Q (ou que Q est une condition nécessaire et suffisante à P).

1.1.3. Tables de vérité

Lorsque l'on fait des opérations sur des propositions, il est parfois plus aisé d'utiliser ce que l'on appelle une *table de vérité*. Celle-ci résume les différentes valeurs prises par une proposition composée. Ci-dessous la table de vérité des opérations définies dans la section précédente.

P	NON(P)
V	F
F	V

P	Q	P OU Q	P ET Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Propriété 1.1. Deux propositions ont la même table de vérité si et seulement si elles sont équivalentes.

Exercice 1.1. À l'aide d'une table de vérité démontrer que les deux propositions suivantes sont vraies.

1. $((P \text{ OU } Q) \text{ ET } R) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } R) \text{ OU } (Q \text{ ET } R))$
2. $((P \text{ ET } Q) \text{ OU } R) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } R) \text{ ET } (Q \text{ OU } R))$

1.1.4. Quantificateurs

Parfois une propriété peut dépendre d'un élément (une variable) et suivant la valeur de cet élément, la propriété est vraie ou fausse. Afin de noter simplement des propositions faisant intervenir de telles propriétés, nous avons besoin des *quantificateurs*.

Définition 1.9 (Quantificateur existentiel). Soit \mathcal{P} une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E . La proposition « au moins un élément x de E vérifie \mathcal{P} » se note « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ ». On appelle *quantificateur existentiel* le symbole « \exists ».

Définition 1.10 (Quantificateur universel). Soit \mathcal{P} une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E . La proposition « tout élément x de E vérifie \mathcal{P} » se note « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ ». On appelle *quantificateur universel* le symbole « \forall ».

Définition 1.11. Soit \mathcal{P} une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E . La proposition « un et un seul élément x de E vérifie \mathcal{P} » se note « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ ».

1.1.5. Négations

Nous avons vu la négation d'une simple proposition, mais qu'en est-il de la négation d'une proposition complexe faisant intervenir des opérations et des quantificateurs ?

Propriété 1.2. Soit P et Q deux propositions. On a alors

- $\text{NON}(\text{NON}(P)) \Leftrightarrow P$
- $\text{NON}(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow ((\text{NON}(P)) \text{ OU } (\text{NON}(Q)))$ (Première loi de De Morgan)
- $\text{NON}(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow ((\text{NON}(P)) \text{ ET } (\text{NON}(Q)))$ (Deuxième loi de De Morgan)
- $\text{NON}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ET } (\text{NON}(Q)))$

Propriété 1.3. Soit \mathcal{P} une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E . On a alors

- $\text{NON}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ est } \forall x \in E, \text{NON}(\mathcal{P}(x)).$
- $\text{NON}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ est } \exists x \in E, \text{NON}(\mathcal{P}(x)).$

1.2. Différents types de raisonnements

1.2.1. Raisonnement par contraposition

Définition 1.12 (Contraposée). Soit P et Q deux propositions. La *contraposée* de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est la proposition « $\text{NON}(Q) \Rightarrow \text{NON}(P)$ »

Propriété 1.4. Une implication et sa contraposée sont équivalentes. C'est-à-dire que

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(Q) \Rightarrow \text{NON}(P))$$

1.2.2. Raisonnement par l'absurde

On veut montrer une proposition P . Pour cela on suppose que cette proposition est fautive, et on tente d'en déduire une absurdité. Cette absurdité peut être soit une proposition Q qui est clairement fautive, soit une proposition de type $Q = (R \text{ ET } \text{NON}(R))$ (qui est clairement fautive aussi).

Intuitivement on voit bien que si l'on aboutit à une absurdité, c'est que l'hypothèse de départ (P fautive) était fautive (et donc que P est vraie). Cela se démontre aussi en utilisant les propriétés de logique :

Nous avons montré que $(\text{NON}(P) \Rightarrow Q)$, or par contraposition cela revient à dire que $(\text{NON}(Q) \Rightarrow \text{NON}(\text{NON}(P)))$ ou encore $(\text{NON}(Q) \Rightarrow P)$. Mais puisque Q est fautive, $\text{NON}(Q)$ est vraie et donc P aussi.

1.2.3. Raisonnement par analyse-synthèse

Nous devons parfois démontrer des choses trop complexes pour être attaquées de front. Il nous faut d'abord analyser le problème afin de le réduire. C'est le cas lorsque l'on cherche à montrer l'existence d'un objet (un nombre par exemple) devant satisfaire certaines conditions. Une analyse du problème permet de réduire le nombre de candidats possibles. La synthèse consiste alors à déterminer parmi les candidats ceux qui sont effectivement solutions du problème.

Le schéma d'un raisonnement par analyse-synthèse est le suivant :

Analyse : On suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des conditions nécessaires que doit vérifier cet objet. Ce faisant, on prouve que si l'objet existe, alors il est nécessairement dans un ensemble restreint.

Synthèse : On considère les objets identifiés dans la partie analyse, et on vérifie que certains ont bien les propriétés voulues (ceci assure l'existence).

1.3. Propriétés de \mathbb{N}

Vous connaissez déjà très bien \mathbb{N} , l'addition, la multiplication sur \mathbb{N} , ainsi que les relations $<$, \leq , $>$ et \geq . Nous n'allons donc pas revenir dessus.

1.3.1. Définitions générales

Commençons par des définitions qui ne sont pas propres à \mathbb{N} .

Définition 1.13 (Plus grand/petit élément). Soit E un ensemble possédant une relation « inférieur ou égal à », notée « \leq », permettant de comparer les éléments entre eux. On appelle *plus grand (resp. petit) élément de E* , un élément x de E (s'il existe) tel que pour tout élément y de E , y est inférieur (resp. supérieur) ou égal à x . En notation mathématiques, cela donne « $\forall y \in E, y \leq x$ » (resp. « $\forall y \in E, x \leq y$ »).

Définition 1.14 (Ensemble des majorants/Minorants). Soit E et F deux ensembles possédant une relation « inférieur ou égal à », notée « \leq », permettant de comparer les éléments entre eux et tels que $E \subset F$. On appelle *ensemble des majorants* (resp. *minorants*) de E (dans F), tous les éléments de F qui sont supérieurs (resp. inférieurs) à tous les éléments de E . Un tel élément est simplement appelé *majorant* (resp. *minorant*) de E . En notation mathématiques, dire que x est un majorant (resp. minorant) de E , revient à dire « $\forall y \in E, y \leq x$ » (resp. « $\forall y \in E, x \leq y$ »).

Si l'ensemble des majorants (resp. minorants) est non vide, on dit que E est une partie majorée (resp. minorée) de F .

1.3.2. Parties de \mathbb{N}

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement à \mathbb{N} et à ses sous-parties.

Axiome 1.1. Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un (unique) plus petit élément.

Propriété 1.5. Toute partie majorée non vide de \mathbb{N} possède un (unique) plus grand élément.

1.3.3. Raisonnement par récurrence

Vous avez déjà vu le raisonnement par récurrence au lycée. Nous allons le démontrer.

Théorème 1.1 (Principe de récurrence). Soit A une partie de \mathbb{N} telle que,

1. A contient 0.
2. Si A contient un entier n , alors A contient $n + 1$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Propriété 1.6 (Récurrence simple). Soit \mathcal{P} une propriété portant sur les entiers naturels.

Soit n_0 un entier naturel.

On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

On suppose également que pour tout entier $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (cela revient à dire que l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$ est vraie).

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Voici comment doit se faire un raisonnement par récurrence et comment il doit être rédigé.

1. On énonce clairement la propriété \mathcal{P} étudiée.
2. On vérifie que la propriété \mathcal{P} est vraie pour n_0 (Initialisation).
3. On se donne un entier $n \geq n_0$ quelconque et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence).
On démontre alors que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (Hérédité).
4. On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

