Relations binaires

TD

Proposition de correction

Exercice (Produit cartésien). Soit deux ensembles E et F et deux relations d'équivalences $\mathscr{R}$ sur E et $\mathscr{S}$ sur F. On définit alors sur $E \times F$ la relation :

$$(x;y) \sim (x';y') \Leftrightarrow (x\mathscr{R}y \text{ et } x'\mathscr{S}y')$$

Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Réflexive : Puisque $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont des relations d'équivalence, nous avons $x\mathscr{R}x$ et $y\mathscr{S}y$. Donc $(x;y) \sim (x;y)$.

Symétrique : De même $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont symétriques, donc si $(x;y) \sim (x';y')$, alors $(x';y') \sim (x;y)$.

Transitive : Là encore cela vient de la transitivité de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$.

Exercice. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E, réflexive et transitive. On définit les relations :

$$x\mathscr{S}y \Leftrightarrow (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x)$$
$$x\mathscr{T}y \Leftrightarrow (x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x)$$

Les relations $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont-elles des relations d'équivalence ?

$\boxed{\mathscr{S}}$ **Réflexive :** Par réflexivité de $\mathscr{R}$, nous avons $x\mathscr{S}x$.

Symétrique : Si $x\mathscr{S}y$, alors $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$, donc $y\mathscr{R}x$ et $x\mathscr{R}y$. D'où $y\mathscr{S}x$.

Transitive : Par transitivité de $\mathscr{R}$, nous avons : $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ et $y\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}x$, d'où $x\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}x$. Donc $x\mathscr{S}z$ et la relation est transitive.

Donc $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

$\boxed{\mathscr{T}}$ **Réflexive :** Par réflexivité de $\mathscr{R}$, nous avons $x\mathscr{S}x$.

Symétrique : Si $x\mathscr{S}y$, alors $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$, donc $y\mathscr{R}x$ ou $x\mathscr{R}y$. D'où $y\mathscr{S}x$.

Transitive : Cette fois, le « ou » nous fait perdre la transitivité. Si $x\mathscr{T}y$ et $y\mathscr{T}z$, alors $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$, et $y\mathscr{R}z$ ou $z\mathscr{R}y$. Mais nous n'avons pas forcément $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, ni même $z\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$. En effet, on peut avoir $x\mathscr{R}y$ et $z\mathscr{R}y$, ce qui ne nous permet pas de conclure sur une relation entre x et z. La relation n'est donc pas transitive.

Donc $\mathscr{S}T$ n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation :

$$(x;y) \ll (x';y') \Leftrightarrow |x'-x| \leq y'-y$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple $(a;b)$.
3. L'ordre est-il total ?

1. **Réflexive :** Nous avons $0 = |x-x| \leq 0 = y-y$.

   Antisymétrique : Si $(x;y) \ll (x';y')$ et $(x';y') \ll (x;y)$, alors alors $0 \leq |x'-x| \leq y'-y$ et $0 \leq |x-x'| \leq y-y'$. Donc $y = y'$, puis $x = x'$.

   Transitive : Si $|x'-x| \leq y'-y$ et $|x''-x'| \leq y''-y'$, alors par l'inégalité triangulaire $|x''-x| \leq |x''-x'|+|x'-x| \leq (y''-y')+(y'-y) = y''-y$.

   La relation est donc bien une relation d'équivalence.
2. Soit $(x;y)$ un majorant de $(a;b)$. Alors $(a;b) \ll (x;y)$, donc $0 \leq |x-a| \leq y-b$, d'où $b-y \leq x-a \leq y-b$. Cela est équivalent à $y \geq x+b-a$ et $y \geq -x+a+b$.
   De même, $(x;y) \ll (a;b) \Leftrightarrow (y \leq x+b-a$ et $y \leq a+b-x)$. Sur la figure **??**, un exemple avec $(a;b) = (1;3)$.
3. Sur la figure **??**, on remarque que si deux points ont la même ordonnée, ils ne pourront pas être comparé. Par exemple, $(2;1)$ et $(5;1)$ ne sont pas comparable car $|2-5| = |5-2| = 3 > 1-1 = 0$. L'ordre n'est donc pas total.

Exercice. Soit $\mathscr{R}$ une relation symétrique et réflexive sur un ensemble X. On définit une relation $\mathscr{S}$ sur X par

$$x\mathscr{S}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_0,\dots,z_n \in X,\ z_0 = x,\ z_n = y,\ \forall i \in [\![0;n-1]\!],\ z_i\mathscr{R}z_{i+1}$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

Réflexive Il suffit de prendre $n = 1$ et $z_0 = z_1 = x$. Puisque $\mathscr{R}$ est réflexive, nous avons bien $z_0\mathscr{R}z_1$.

Symétrique Si $x\mathscr{S}y$, alors on pose $z'_0 = z_n$, $z'_1 = z_{n-1}$, …, $z'_n = z_0$. Puisque $\mathscr{R}$ est symétrique, nous avons bien $z'_i\mathscr{R}z'_{i+1}$.

Transitive Si $x\mathscr{S}y$ et $y\mathscr{S}w$, alors nous avons $x = z_0$, $z_n = y = t_0$, $w = t_p$. Donc en posant $z'_0 = z_0$, …, $z'_n = z_n$, $z'_{n+1} = t_1$, …, $z'_{n+p} = t_p = w$, nous avons bien $z'_i\mathscr{R}z'_{i+1}$.

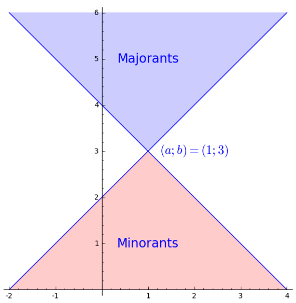

FIGURE 1 – Majorants et minorants