Département de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

CORRECTION DS2 (17/11/2017)

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

Q.C.M. 1 *[4 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
Aucune justification n'est demandée. **[Réponses DIRECTEMENT écrites sur votre copie]**

1. Considérons 7 nombres entiers consécutifs. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses :
   A : au moins 4 multiples de 2 **FAUX** : 1 2 3 4 5 6 7
   B : au moins un multiple de 6 **VRAI**
   C : au moins un nombre premier **FAUX** : 90 91 92 93 94 95 96
   D : au moins 2 multiples de 3 **VRAI**
   E : au moins 2 multiples de 4 **FAUX** : 5 6 7 8 9 10 11

2. Soit n un entier. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses :
   A : Si n est divisible par 4, alors n a au moins 4 diviseurs.
   FAUX : $n = 4$ admet pour diviseur 1, 2 et 4
   B : Si n est divisible par 8, alors n a au moins 4 diviseurs.
   VRAI (si $n = 8k = (1 \times 2^3)k$ admettra au moins pour diviseur 1, 2, $2^2 = 4$ et $2^3 = 8$)
   C : Si n a au moins 3 diviseurs, alors n n'est pas premier.
   VRAI : un nombre premier a exactement 2 diviseurs (1 et lui-même).
   D : Si n a au moins 3 diviseurs, alors n est pair.
   FAUX : $n = 9 = 3^2$ admet pour diviseur $1, 3$ et $3^3 = 9$ mais 27 n'est pas pair.
   E : Si n est pair, alors n a au moins 3 diviseurs.
   FAUX : $n = 2$ est pair mais n'admet pour diviseurs que 1 et 2.

3. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses :
   A : Si $Card(E) > Card(F)$, alors f est surjective.
   FAUX : tous les éléments de F n'ont pas forcément un antécédent dans E (tous les éléments de E peuvent avoir la même image !)
   B : Si $Card(E) > Card(F)$, alors f n'est pas injective.
   VRAI : cela signifie que plusieurs éléments de E peuvent avoir la même image dans F (ou pas d'image).
   C : Si $Card(E) = Card(F)$, alors f est bijective.
   FAUX : tous les éléments de F n'ont pas forcément un antécédent dans E (tous les éléments de E peuvent avoir la même image !)
   D : Si $Card(E) = Card(F)$ et si f est surjective, alors f est bijective.
   VRAI : tous les éléments de F ont forcément (au moins) un antécédent dans E et il y a autant d'éléments dans E que dans F (donc impossible d'avoir deux images identiques)
   E : Si $Card(E) \neq Card(F)$, alors f est injective ou surjective.
   FAUX :
   F : Si $Card(E) = Card(F)$ et si f n'est pas surjective, alors f n'est pas injective.
   VRAI : si certains éléments de F n'ont pas d'antécédents mais qu'il y a autant d'éléments dans E et dans F : alors nécessairement, certains éléments de E (différents) ont la même image

Exercice 1 *[5 points]*
Soient E un ensemble et A une partie de E. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation suivante

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : \quad X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \cap A = Y \cap A.$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   — **Réflexive** : $\forall X \in \mathcal{P}(E) : \quad X \,\mathcal{R}\, X.$
   Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Alors
   $$X \,\mathcal{R}\, X \iff X \cap A = X \cap A$$
   ce qui est toujours vrai. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   — **Symétrique** : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : \quad X \,\mathcal{R}\, Y \iff Y \,\mathcal{R}\, X.$
   Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Alors
   $$X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \cap A = Y \cap A \iff Y \cap A = X \cap A \iff Y \,\mathcal{R}\, X$$
   Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

   — **Transitive** : $\forall (X,Y,Z) \in \mathcal{P}(E)^3 : \quad (X \,\mathcal{R}\, Y \text{ et } Y \,\mathcal{R}\, Z) \iff X \,\mathcal{R}\, Z.$
   Soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$. Alors
   $$\begin{aligned}(X \,\mathcal{R}\, Y \text{ et } Y \,\mathcal{R}\, Z) &\iff X \cap A = Y \cap A \text{ et } Y \cap A = Z \cap A \\ &\iff X \cap A = Z \cap A \\ &\iff X \,\mathcal{R}\, Z\end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

   Finalement, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Donner les classes d'équivalences de $\emptyset$, E, A et $\complement_E(A)$.

   — $\mathcal{R}(\emptyset) = \dot{\emptyset} = \{X \in \mathcal{P}(E) : \emptyset \mathcal{R} X\}$. Il vient
   $$\emptyset \mathcal{R} X \iff (X \cap A = \emptyset \cap A) \iff (X \cap A = \emptyset) \iff (X \subset \complement_E(A))$$
   Ainsi $\mathcal{R}(\emptyset) = \dot{\emptyset} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subset \complement_E(A)\}$.

   — $\mathcal{R}(E) = \dot{E} = \{X \in \mathcal{P}(E) : E \mathcal{R} X\}$. Il vient
   $$E \mathcal{R} X \iff (X \cap A = E \cap A) \iff (X \cap A = A) \iff (A \subset X)$$
   Ainsi $\mathcal{R}(E) = \dot{E} = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subset X\}$.

   — $\mathcal{R}(A) = \dot{A} = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \mathcal{R} X\}$. Il vient
   $$A \mathcal{R} X \iff (X \cap A = A \cap A) \iff (X \cap A = A) \iff (A \subset X)$$
   Ainsi $\mathcal{R}(A) = \dot{A} = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subset X\}$.

   — $\mathcal{R}(\complement_E(A)) = \dot{\complement_E(A)} = \{X \in \mathcal{P}(E) : \complement_E(A) \mathcal{R} X\}$. Il vient
   $$\complement_E(A) \mathcal{R} X \iff (X \cap A = \complement_E(A) \cap A) \iff (X \cap A = \emptyset) \iff (X \subset \complement_E(A))$$
   Ainsi $\mathcal{R}(\complement_E(A)) = \dot{\complement_E(A)} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subset \complement_E(A)\}$.

   On remarque que $\dot{\complement_E(A)} = \dot{\emptyset}$.

3. Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique représentant de la classe d'équivalence de X.
Supposons $B = A \cap X$, alors $B \in \dot{X}$ car

$$A \cap B = A \cap (A \cap X) = (A \cap A) \cap X = A \cap X \Longleftrightarrow B\mathcal{R}X \Longleftrightarrow B \in \dot{X}$$

Il vient donc que $B \subset A$. Montrons qu'il s'agit du seul élément de $\dot{X}$.
Pour cela, supposons qu'il existe $B' \in \dot{X}$ vérifiant $B' \subset A$. Alors

$$B' \in \dot{X} \Longleftrightarrow A \cap X = B' \cap A = B'$$

Donc $B' = A \cap X = B$ ie que si B' existe, il vérifie nécessairement que $B = B'$.
Donc $B = A \cap X$ est le seul élément de la classe d'équivalence de X.

Exercice 2 *[4 points]*
On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation suivante

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \quad x \ll y \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^k.$$

1. Montrer que la relation $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
Montrons d'abord que $\ll$ est une relation d'ordre :
— **Réflexive** : $\forall x \in \mathbb{N}^* : \quad x \ll x$.
Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Il vient donc

$$x \ll x \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = x^k.$$

En effet, pour $k = 1 \in \mathbb{N}^*, x = x^k$ est vérifiée. Donc $\ll$ est réflexive.
— **Antisymétrique** : $\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \quad (x \ll y \text{ et } y \ll x) \Longrightarrow x = y$
Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Il vient donc

$$\begin{aligned} (x \ll y \text{ et } y \ll x) &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N}^* : y = x^{k'} \text{ et } x = y^k \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N}^* : x = y^k = (x^{k'})^k = x^{kk'} \end{aligned}$$

ie $kk' = 1$. Or $k, k' \in \mathbb{N}^*$, donc $k = k' = 1$: ainsi $x = y$. $\ll$ est antisymétrique.
— **Transitive** :$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 : \quad (x \ll y \text{ et } y \ll z) \Longrightarrow x \ll z$
Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Il vient donc

$$\begin{aligned} (x \ll y \text{ et } z \ll x) &\Longrightarrow \exists\ k, k' \in \mathbb{N}^* : y = x^k \text{ et } z = y^{k'} \\ &\Longrightarrow \exists\ k, k' \in \mathbb{N}^* : z = y^{k'} = (x^k)^{k'} = x^{kk'} \\ &\Longrightarrow \exists\ k'' \in \mathbb{N}^* : z = x^{k''} \end{aligned}$$

car $k, k' \in \mathbb{N}^*$, alors $k'' = kk' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $x \ll z$. $\ll$ est transitive.
Finalement $\ll$ **est une relation d'ordre**.
De plus, $\ll$ est une relation d'ordre partiel (donc non total) car il existe des couples $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ qui ne sont pas en relation $\ll$: par exemple, on a ni $2 \ll 3$, ni $3 \ll 2$.

2. Soit $(A, \ll)$ un ensemble ordonné où $A = \{2; 4; 16\}$.
Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A par $\ll$ (Justifier votre réponse).
On remarque que si $x \ll y$ alors $x \leq y$ car il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^k = x \times x \times ... \times x \geq x$ (car $x \geq 1$).
Ainsi, le seul plus petit élément possible de $A = \{2; 4; 16\}$ est 2 :

$$\begin{aligned} 4 = 2 \times 2 = 2^2 &\Longrightarrow 2 \ll 4 \\ 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 &\Longrightarrow 2 \ll 16 \end{aligned}$$

Sur le même principe, le seul plus grand élément de $A = \{2; 4; 16\}$ est 16 :

$$\begin{array}{rcl} 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 & \Longrightarrow & 2 \ll 16 \\ 16 = 4 \times 4 = 4^2 & \Longrightarrow & 4 \ll 16 \end{array}$$

Finalement, on notera que $A = \{2; 4; 16\}$ est un ensemble totalement ordonné pour la relation $\ll$: autrement dit, $\ll$ est une relation d'ordre total sur A.

Exercice 3 *[3 points]*
Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y; xy) \end{array}$$

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $B = \{(a, b)\}$. Déterminer l'ensemble $f_{-1}(B)$.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La notation $f_{-1}(B)$ se traduit par l'image réciproque de B :

   $$(x, y) \in f_{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x, y) \in B \Longleftrightarrow f(x, y) = (a, b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x + y & = a & (1) \\ xy & = b & (2) \end{array} \right.$$

   Par conséquent, $(x, y) \in f_{-1}(B)$ si et seulement x et y sont solutions de $P : X^2 - aX + b = 0$ (d'après (1) $x = a - y$, et en réinjectant dans (2) $y^2 - ay + b = 0$) :
   — Si $\Delta = a^2 - 4b < 0$: P ne possède pas de racines réelles donc $f_{-1}(B) = \emptyset$.
   — Si $\Delta = a^2 - 4b = 0$: P possède une racine réelle double $a/2$ donc $f_{-1}(B) = \left\{ \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right) \right\}$.
   — Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$: P possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 donc $f_{-1}(B) = \{(x_1; x_2); (x_2; x_1)\}$.

2. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
   Utilisons la définition de l'image directe :

   $$(X, Y) \in f(\mathbb{R}^2) \Longleftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (X, Y) = f(x, y)$$

   Or, d'après la question précédente, $(X, Y) = f(x, y)$ si et seulement $X^2 - 4y \geq 0$. Par conséquent

   $$f(\mathbb{R}^2) = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 - 4Y \geq 0 \right\}$$

3. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
   D'après 2., $f(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective.
   De plus, $f((1, 2)) = f((2, 1))$ et $(1, 2) \neq (2, 1)$: donc f n'est pas injective.

Exercice 4 *[4 points]*
Soit E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E

1. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors pour toute partie X de E :

   $$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$$

   Supposons $A \cap B = \emptyset$. Alors Par distributivité de $\cap$ et $\cup$, on a :

   $$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X \cup (A \cap B) = X \cup \emptyset = X$$

2. Considérons l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cup A; X \cup B) \end{array}$.

(a) Montrer que f n'est pas surjective.
Cherchons $(Y, Y') \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tel que pour tout $X\mathcal{P}(E)$: $(Y, Y') \neq f(X)$, ie cherchons $(Y, Y') \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ qui n'admet pas d'antécédents par f.
Notons que pour tout $X \in \mathcal{P}(E), A \subset (X \cup A)$ et $B \subset (X \cup B)$. Alors
— Si $A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$, alors $(\emptyset; \emptyset)$ n'admet pas d'antécédent par f.
— Si $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$, alors $f(X) = (X, X)$. Puisque $E \neq \emptyset$, alors $(\emptyset, E)$ n'admet pas d'antécédent par f.
Dans les deux cas, f n'est pas surjective.

(b) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
Procédons par double implication :
$\Leftarrow$ Supposons $A \cap B = \emptyset$, montrons que f est injective ie

$$\forall X, X' \in \mathcal{P}(E) : f(X) = f(X') \Rightarrow X = X'.$$

Soient $X, X' \in \mathcal{P}(E)$, supposons $f(X) = f(X') \Leftrightarrow (X \cup A; X \cup B) = (X' \cup A; X' \cup B)$.
Par conséquent $(X \cup A) \cap (X \cup B) = (X' \cup A) \cap (X' \cup B)$.
Ainsi, d'après la question 1. $X = X'$ donc f est injective.
$\Rightarrow$ Supposons f injective. Montrons que $A \cap B = \emptyset$.
On a $f(A \cap B) = (A, B) = f(\emptyset)$. Donc par injectivité de f, on en déduit $A \cap B = \emptyset$

Fin.

Exercice 5 *Bonus [2 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). Aucune justification n'est demandée. **[Réponses DIRECTEMENT écrites sur votre copie]**
Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logiques suivants : $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, $\subset$, $\supset$, $\leq$, $\geq$ ou $=$:

1. $\forall\ A \subset E,\ f_{-1}(f(A)) \quad \cdots\cdots \supset \cdots\cdots \quad A$
2. $\forall\ C \subset F,\ f(f_{-1}(C)) \quad \cdots\cdots \subset \cdots\cdots \quad C$
3. $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cup B) \quad \cdots\cdots = \cdots\cdots \quad f(A) \cup f(B)$
4. $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) \quad \cdots\cdots \subset \cdots\cdots \quad f(A) \cap f(B)$
5. $\forall\ C, D \subset F,\ f_{-1}(C \cup D) \quad \cdots\cdots = \cdots\cdots \quad f_{-1}(C) \cup f_{-1}(D)$
6. $\forall\ C, D \subset F,\ f_{-1}(C \cap D) \quad \cdots\cdots = \cdots\cdots \quad f_{-1}(C) \cap f_{-1}(D)$
7. $\forall\ f, g \in \mathcal{F}(E, E),\ f, g$ bijectives $\quad \cdots\cdots \Leftrightarrow \cdots\cdots \quad$ ($f \circ g$ bijective et $g \circ f$ bijective)
8. $\forall\ f \in \mathcal{F}(E, F)$ bijective, $y = f(x) \quad \cdots\cdots \Leftrightarrow \cdots\cdots \quad x = f^{-1}(y)$