

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 23).*
- *Ce DS est composé d'un Vrai-Faux, de trois exercices indépendants et d'un exercice bonus.*

Vrai-Faux 1 [4.5 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
Aucune justification n'est demandée. **[RÉPONSES DIRECTEMENT SUR LA COPIE]**

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont des groupes :

A : (\mathbb{C}, \times)

D : $(\{-1; 0; 1\}, \times)$

B : $(\{-1; 1\}, \times)$

E : $(\{-i; i; -1; 1\}, \times)$

C : $(\{-i; i\}, \times)$

F : $(\{-i; 0; i\}, \times)$.

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

A : L'ensemble des fonctions bornées.

B : L'ensemble des fonctions monotones.

C : L'ensemble des fonctions qui s'annulent au moins une fois sur \mathbb{R} .

D : L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent jamais sur \mathbb{R} .

E : L'ensemble des fonctions qui valent 0 en 1.

F : L'ensemble des fonctions qui valent 1 en 0.

G : L'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

H : L'ensemble des fonctions paires sur \mathbb{R} .

I : L'ensemble des fonctions T -périodiques (où $T > 0$ réel fixé).

J : L'ensemble des fonctions k -lipschitziennes.

K : L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 0$.

L : L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$.

Exercice 1 [4 points] Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que :

1. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

2. $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$

Tournez svp →

Exercice 2 [8 points] Considérons A l'ensemble des réels suivant

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{6} \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x) = \varphi(a + b\sqrt{6}) = a - b\sqrt{6}. \end{aligned}$$

- (a) Calculer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
 - (b) Montrer que φ est bijective dans A .
 - (c) En déduire que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$.
3. Pour tout $x \in A$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$.
 - (a) Montrer que $N \in \mathcal{F}(A, \mathbb{Z})$.
 - (b) Montrer que N est un morphisme (de groupes) pour la multiplication \times .
Indication : on pourra utiliser (a) pour identifier les ensembles de départ et d'arrivée.
 - (c) Montrer que $x \in A$ admet un inverse (par la multiplication) si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
 - (d) Montrer que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible dans A et calculer son inverse.

Exercice 3 [4.5 points] Considérons les ensembles suivants

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $F \cup G$ et $F \cap G$.
3. $F \cup G$ et $F \cap G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

Vrai-Faux 2 Bonus [2 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). Aucune justification n'est demandée. **[RÉPONSES DIRECTEMENT SUR LA COPIE]**
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

- A : L'ensemble des suites bornées.
- B : L'ensemble des suites monotones.
- C : L'ensemble des suites convergentes.
- D : L'ensemble des suites convergentes vers 0.
- E : L'ensemble des suites convergentes vers l , où $l \in \mathbb{R}^*$ fixé.
- F : L'ensemble des suites divergentes.
- G : L'ensemble des suites géométriques.
- H : L'ensemble des suites géométriques de raison a , où $a \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Fin.