EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Département de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

CORRECTION DS4 (08/03/2018)

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

Vrai-Faux 1 *[4.5 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
Aucune justification n'est demandée. **[RÉPONSES DIRECTEMENT SUR LA COPIE]**

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont des groupes :
   A : $(\mathbb{C}, \times)$ **FAUX** : $0 \in \mathbb{C}$ *n'admet pas de symétrique.*
   B : $(\{-1; 1\}, \times)$ **VRAI**
   C : $(\{-i; i\}, \times)$ **FAUX** : $1 \notin \{-i; i\}$ *(1 E.N. de $\times$).*
   D : $(\{-1; 0; 1\}, \times)$ **FAUX** : $0 \in \mathbb{C}$ *n'admet pas de symétrique.*
   E : $(\{-i; i; -1; 1\}, \times)$ **VRAI**
   F : $(\{-i; 0; i\}, \times)$. **FAUX** : $1 \notin \{-i; 0; i\}$ *et* $0 \in \mathbb{C}$ *n'admet pas de symétrique*.

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?
   A : L'ensemble des fonctions bornées. **VRAI**
   B : L'ensemble des fonctions monotones. **FAUX** : *non stable par* $+$ ($x^3 - x$ par ex.)
   C : L'ensemble des fonctions qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$. **FAUX** : *non stable par* +
   D : L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$. **FAUX** : *non stable par* $\times$
   E : L'ensemble des fonctions qui valent 0 en 1. **VRAI**
   F : L'ensemble des fonctions qui valent 1 en 0. **FAUX** : $0_E \notin F$, *non stable par* +
   G : L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. **VRAI**
   H : L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$. **VRAI**
   I : L'ensemble des fonctions T-périodiques (où $T > 0$ réel fixé). **VRAI**
   J : L'ensemble des fonctions k-lipschitziennes. **VRAI**
   K : L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 0$. **VRAI**
   L : L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$. **FAUX** : *même question que F*

Exercice 1 *[4 points]* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que :

1. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
   Procédons par double inclusion (ie par implications successives) :
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cap (B + C)$. Montrons que $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$:

$$\begin{array}{rcll}
x \in A \cap (B+C) & \Leftrightarrow & x \in A \quad \text{et} \quad x \in B + C & \sharp \text{ déf de } \cap \\
& \Leftrightarrow & x \in A \quad \text{et} \quad x = y + z \quad (y \in B, z \in C) & \sharp \text{ déf de } B + C \\
& \Leftrightarrow & x = y + z \in A, \quad y \in B, z \in C & \sharp \text{ car } x \in A \text{ et } x = y + z \\
& \Leftrightarrow & y \in A \quad z \in A \quad y \in B, z \in C & \sharp \text{ car } A \ SEV \\
& \Leftrightarrow & y \in A \cap B, z \in A \cap C & \sharp \text{ déf de } \cap \\
& \Leftrightarrow & x = y + z, \quad y \in A \cap B, z \in A \cap C & \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) + (A \cap C) &
\end{array}$$

Notons que le résultat établi a été fait par équivalences successives, l'égalité est donc vérifiée.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. Montrons que $x \in A \cap (B + C)$:

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cap B) + (A \cap C) & \Leftrightarrow & x = y + z \;\; y \in (A \cap B), z \in (A \cap C) & \sharp \text{ déf } + \\ & \Leftrightarrow & x = y + z \;\; y \in A \text{ et } y \in B, z \in A \text{ et } z \in C & \sharp \text{ déf } \cap \\ & \Leftrightarrow & x = y + z \;\; y + z \in A \text{ et } y + z \in B + C & \sharp \text{ déf } \cap \text{ et } A \; SEV \\ & \Leftrightarrow & x \in A \text{ et } x \in B + C & \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cap (B + C) & \end{array}$$

2. $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.
   Commençons par simplifier des deux membres de l'égalité, afin de retrouver le résultat plus facilement. On a :

$$\begin{array}{rcll} A + (B \cap (A + C)) & = & A + ((B \cap A) + (B \cap C)) & \sharp \text{ d'après question précédente} \\ & = & A + (B \cap A) + (B \cap C) & \sharp \text{ par associativité} \\ & = & A + (B \cap C) & \sharp \text{ car } (B \cap A) \subset A \text{ et } A + A = A \end{array}$$

   De même, il vient :

$$\begin{array}{rcll} (A + B) \cap (A + C) & = & (A \cap A) + (A \cap C) + (B \cap A) + (B \cap C) & \sharp \text{ d'après 1.} \\ & = & A + (A \cap C) + (B \cap A) + (B \cap C) & \sharp A \; SEV \\ & = & A + (B \cap C) & \sharp (A \cap C), (B \cap A) \subset A \end{array}$$

   On en déduit l'égalité.

Exercice 2 *[8 points]* On note A l'ensemble des réels suivant

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{6} \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
   Il suffit de montrer que $1_{\mathbb{R}} = 1 \in A$, que $(A, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, que la multiplication est stable :
   (a) Montrons que $1_{\mathbb{R}} = 1 \in A : 1 \in A \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} : 1 = a + b\sqrt{6}$.
   Or $1 = 1 + 0\sqrt{6}$. Donc $\boxed{1_{\mathbb{R}} \in A}$.
   (b) Montrons que $(A, +)$ **est un sous-groupe de** $(\mathbb{R}, +)$:
   — *E.N. de* $+$: $0_{\mathbb{R}} = 0 \in A \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} : 0 = a + b\sqrt{6}$.
   Or $0 = 0 + 0\sqrt{6}$. Donc $\boxed{0_{\mathbb{R}} \in A}$.
   — *Stabilité par* $+$: $\forall x, y \in A : x + y \in A$.
   Soient $x, y \in A$, avec $x = a + b\sqrt{6}, y = a' + b'\sqrt{6}; a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x + y = (a + b\sqrt{6}) + (a' + b'\sqrt{6}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{6}$$

   Car $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ donc $(a + a'), (b + b') \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{x + y \in A}$.
   — *Stabilité par passage au symétrique* :$\forall x \in A, \exists x' \in A : x + x' = x' + x = 0_{\mathbb{R}}$.
   Soit $x \in A$, ie $\exists a, b \in \mathbb{Z} : x = a + b\sqrt{6}$. Alors $x' = -x = -a - b\sqrt{6}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}; -a, -b \in \mathbb{Z}$. Donc $\boxed{x' \in A}$.
   Ainsi $\boxed{(A, +) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +)}$.
   (c) Montrons que A **est stable par** $\times$: $\forall x, y \in A : x \times y \in A$.
   Soient $x, y \in A$, avec $x = a + b\sqrt{6}, y = a' + b'\sqrt{6}; a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x \times y = (a + b\sqrt{6}) \times (a' + b'\sqrt{6}) = (aa' + 6bb') + (ab' + a'b)\sqrt{6}$$

   Car $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ donc $(aa' + 6bb'), (ab' + a'b) \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{x \times y \in A}$.
   Finalement $\boxed{(A, +, \times) \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times)}$.

2. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A & \to & A \\ x & \mapsto & \varphi(x) = \varphi(a + b\sqrt{6}) = a - b\sqrt{6}. \end{array}$$

(a) Calculer $Ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$.
On a
— $Ker(\varphi) = \{x \in A : \varphi(x) = 0_A\}$. On résout donc

$$\begin{array}{rcll} x \in Ker(\varphi) & \Leftrightarrow & \varphi(x) = 0_A = 0 & \sharp \text{ d'après 1. } 0_A = 0 \\ & \Leftrightarrow & a - b\sqrt{6} = 0 & \sharp \text{ car } x \in A, x = a + b\sqrt{6} \\ & \Leftrightarrow & a = b = 0 & \sharp \text{ car } a, b \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & x = 0 = 0_A & \sharp \text{ car } x \in A, x = a + b\sqrt{6} \end{array}$$

Ainsi $\boxed{Ker(\varphi) = \{0_A\}}$.
— $Im(\varphi) = \{y \in A, \exists x \in A : y = \varphi(x)\}$. On résout donc

$$\begin{array}{rcll} y \in Im(\varphi) & \Leftrightarrow & y \in A, \exists x \in A : y = \varphi(x) & \\ & \Leftrightarrow & a - b\sqrt{6} = A + B\sqrt{6} & \sharp x \in A \ (x = a + b\sqrt{6}) \ \ (y = A + B\sqrt{6}) \\ & \Leftrightarrow & a = A \in \mathbb{Z} \quad b = -B \in \mathbb{Z} & \sharp \text{ par identification} \\ & \Leftrightarrow & y \in A & \sharp \text{ car } \forall y \in A, \exists x \in A : y = \varphi(x) \end{array}$$

Ainsi $\boxed{Im(\varphi) = A}$.

(b) Montrer que φ est bijective dans A.
D'après 2.(a), on a

$$\left.\begin{array}{rcl} Ker(\varphi) = \{0_A\} & \Leftrightarrow & \varphi \text{ injective} \\ Im(\varphi) = A & \Leftrightarrow & \varphi \text{ surjective} \end{array}\right\} \quad \boxed{\varphi \text{ bijective}}$$

(c) En déduire que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$.
D'après 1, $(A, +, \times)$ est un anneau (car tout sous-anneau est un anneau) et d'après 2.(b), φ est bijective. Il ne reste qu'à montrer que φ est un morphisme de $(A, +, \times)$ dans $(A, +, \times)$:

i. $\varphi(1_A) = 1_A$:
$1_A = 1 = 1 + 0\sqrt{6}$. Ainsi $\varphi(1_A) = \varphi(1) = \varphi(1 + 0\sqrt{6}) = 1 - 0\sqrt{6} = 1 = 1_A$.
Donc $\boxed{\varphi(1_A) = 1_A}$.

ii. $\forall x, y \in A : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$:
Soient $x, y \in A$, avec $x = a + b\sqrt{6}$ et $y = a' + b'\sqrt{6}$. Alors

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x + y) & = & \varphi((a + a') + (b + b')\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } x, y \\ & = & (a + a') - (b + b')\sqrt{6} & \sharp \text{ def de } \varphi \\ & = & (a - b\sqrt{6}) + (a' - b'\sqrt{6}) & \sharp \text{ A anneau (associativité, commutativité)} \\ & = & \varphi(x) + \varphi(y) & \sharp \text{ def de } \varphi \end{array}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un morphisme pour } +}$.

iii. $\forall x, y \in A : \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$:
Soient $x, y \in A$, avec $x = a + b\sqrt{6}$ et $y = a' + b'\sqrt{6}$. Alors

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x \times y) & = & \varphi((aa' + 6bb') + (ab' + a'b)\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } x, y \\ & = & (aa' + 6bb') - (ab' + a'b)\sqrt{6} & \sharp \text{ def de } \varphi \\ & = & (a - b\sqrt{6}) \times (a' - b'\sqrt{6}) & \sharp \text{A anneau (associativité, commutativité)} \\ & = & \varphi(x) \times \varphi(y) & \sharp \text{ def de } \varphi \end{array}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un morphisme pour } \times}$.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } (A,+,\times)}$.

3. Pour tout $x \in A$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$.
   (a) Montrer que $N \in \mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$.
   Par définition de $N, x \in A$ ($x = a + b\sqrt{6}$) et
   $$\forall x \in A : N(x) = x\varphi(x) = (a+b\sqrt{6})(a-b\sqrt{6}) = a^2 - 6b^2 \in \mathbb{Z}.$$
   Ainsi $\boxed{N \in \mathcal{F}(A,\mathbb{Z})}$
   (b) Montrer que N est un morphisme (de groupes) pour la multiplication.
   Montrons donc $\forall x, y \in A : N(x \times y) = N(x) \times N(y)$.
   Soient $x, y \in A(x = a + b\sqrt{6}; y = a' + b'\sqrt{6})$, alors
   $$\begin{array}{rcll} N(x\times y) &=& N((a+b\sqrt{6})\times(a'+b'\sqrt{6})) & \sharp \text{ def de } x,y \\ &=& N((aa'+6bb')+(ab'+a'b)\sqrt{6}) & \sharp \text{ def produit } x,y \\ &=& ((aa'+6bb')+(ab'+a'b)\sqrt{6})\varphi((aa'+6bb')+(ab'+a'b)\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } N \\ &=& ((aa'+6bb')+(ab'+a'b)\sqrt{6})\times((aa'+6bb')-(ab'+a'b)\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } \varphi \\ &=& (aa'+6bb')^2-6(ab'+a'b)^2 & \sharp \text{ def du produit} \\ &=& (aa')^2-6a^2b'^2-6b^2a'^2+6b^2b'^2 & \end{array}$$
   $$\begin{array}{rcll} N(x)\times N(y) &=& N(a+b\sqrt{6})\times N(a'+b'\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } x,y \\ &=& (a+b\sqrt{6})\varphi(a+b\sqrt{6})\times(a'+b'\sqrt{6})\varphi(a'+b'\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } N \\ &=& (a+b\sqrt{6})(a-b\sqrt{6})\times(a'+b'\sqrt{6})(a'-b'\sqrt{6}) & \sharp \text{ def de } \varphi \\ &=& (a^2+6b^2)(a'^2+6b'^2) & \sharp \text{ exp. conjuguée} \\ &=& (aa')^2-6a^2b'^2-6b^2a'^2+6b^2b'^2 & \end{array}$$
   Ainsi $N(x \times y) = N(x) \times N(y)$: $\boxed{N \text{ est donc un morphisme de } (A,\times) \text{ dans } (\mathbb{Z},\times)}$.
   (c) Montrer que $x \in A$ admet un inverse (par la multiplication) si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
   Procédons par double implication :
   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x \in A$ admet un symétrique $x' \in A$, alors $x \times x' = 1_A = 1$. Donc
   $$\begin{array}{rcll} N(x\times x') &=& N(1) & \sharp \text{ car N est une application} \\ &=& N(x)\times N(x') & \sharp \text{ car N morphisme} \end{array}$$
   Or $N(1) = 1$ qui est l'élément neutre de $(\mathbb{Z},\times)$ et $N(x), N(x') \in \mathbb{Z}$ sont donc inversibles. De plus, les seuls éléments inversibles (par $\times$) dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1. Donc $\boxed{N(x) = \pm 1}$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $N(x) = \pm 1$. Montrons que x admet un symétrique dans A.
   — Si $N(x) = 1$, alors $x\varphi(x) = 1$ ie $\varphi(x)$ est le symétrique de x dans A.
   — Si $N(x) = -1$, alors $x\varphi(x) = -1$ ie $-\varphi(x)$ est le symétrique de x dans A.
   Dans tous les cas, $\boxed{x \text{ admet donc un symétrique (inverse) dans } A}$.
   (d) Montrer que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible dans A et calculer son inverse.
   On a $N(5 + 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1$. Donc d'après la question précédente
   $$\boxed{5+2\sqrt{6} \text{ est inversible, d'inverse } \varphi(x) = 5-2\sqrt{6}}.$$

Exercice 3 *[4.5 points]* Considérons les ensembles suivants
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (a) F est un SEV de $\mathbb{R}^3$:
   — *Élément neutre* : $\boxed{0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F}$ car $x = 0$.

— *Stabilité* $+$: $\forall u, v \in F, u+v \in F$.
Soient $u=(0,y,z), v=(0,y',z') \in F$. Alors

$$u+v=(0,y,z)+(0,y',z')=(0+0,y+y',z+z').$$

Ainsi $\boxed{u+v \in F}$

— *Stabilité* $\times$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \alpha u \in F$.
Soient $u=(0,y,z) \in F, \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha u=\alpha \times (0,y,z)=(\alpha \times 0, \alpha \times y, \alpha \times z)=(0,\alpha y,\alpha z).$$

Ainsi $\boxed{\alpha u \in F}$

(b) G est un SEV de $\mathbb{R}^3$:

— *Élément neutre* : $\boxed{0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0) \in G}$ car $y=0$.

— *Stabilité* $+$: $\forall u, v \in G, u+v \in G$.
Soient $u=(x,0,z), v=(x',0,z') \in G$. Alors

$$u+v=(x,0,z)+(x',0,z')=(x+x',0+0,z+z').$$

Ainsi $\boxed{u+v \in G}$

— *Stabilité* $\times$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in G, \alpha u \in G$.
Soient $u=(x,0,z) \in G, \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha u=\alpha \times (x,0,z)=(\alpha \times x, \alpha \times 0, \alpha \times z)=(\alpha x,0,\alpha z).$$

Ainsi $\boxed{\alpha u \in G}$

2. Déterminer $F \cup G$ et $F \cap G$.
Il vient

$$F \cup G=\{(0,y,z); y,z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0,z); x,z \in \mathbb{R}\}=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \text{ ou } y=0\}$$

et

$$F \cap G=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \text{ et } y=0\}=\{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$$

3. $F \cup G$ et $F \cap G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\boxed{F \cup G \text{ n'est pas un SEV}}$: en effet, $F \cup G$ n'est pas stable par $+$:

$$(0,1,1),(1,0,1) \in (F \cup G) \quad \text{mais} \quad (0,1,1)+(1,0,1)=(1,1,2) \notin (F \cup G).$$

(b) $\boxed{F \cap G \text{ est un SEV}}$:

— *Élément neutre* : $\boxed{0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0) \in (F \cap G)}$ car $x=y=0$.

— *Stabilité* $+$: $\forall u, v \in (F \cap G), u+v \in (F \cap G)$.
Soient $u=(0,0,z), v=(0,0,z') \in (F \cap G)$. Alors

$$u+v=(0,0,z)+(0,0,z')=(0+0,0,z+z').$$

Ainsi $\boxed{u+v \in (F \cap G)}$

— *Stabilité* $\times$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in (F \cap G), \alpha u \in (F \cap G)$.
Soient $u=(0,y,z) \in F, \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha u=\alpha \times (0,0,z)=(\alpha \times 0, \alpha \times 0, \alpha \times z)=(0,0,\alpha z).$$

Ainsi $\boxed{\alpha u \in (F \cap G)}$

Vrai-Faux 2 *Bonus [2 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). Aucune justification n'est demandée. **[RÉPONSES DIRECTEMENT SUR LA COPIE]**

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

A : L'ensemble des suites bornées. **VRAI**
B : L'ensemble des suites monotones. **FAUX**
C : L'ensemble des suites convergentes. **VRAI**
D : L'ensemble des suites convergentes vers 0. **VRAI**
E : L'ensemble des suites convergentes vers l, où $l \in \mathbb{R}^*$ fixé. **FAUX**
F : L'ensemble des suites divergentes. **FAUX**
G : L'ensemble des suites géométriques. **FAUX**
H : L'ensemble des suites géométriques de raison a, où $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. **VRAI**

Fin.