

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 22).*
- *Ce DS est composé de questions de cours et de trois exercices indépendants (dont deux ont une question bonus).*

Question de cours 1 [5 points]

1. Soit A un ensemble ; \boxplus et \boxtimes deux lois de compositions internes sur A .
Donner les définitions suivantes :
 - (a) $(A; \boxplus)$ est un groupe commutatif,
 - (b) $(A; \boxtimes)$ est un magma associatif,
 - (c) \boxtimes est distributive par rapport à \boxplus ,
2. Soit $(A; \boxplus; \boxtimes)$ un anneau et $B \subset A$.
Donner la définition de B est un sous-anneau de A .
3. Soit $(A; \boxplus; \boxtimes), (B; \oplus; \otimes)$ deux anneaux.
Donner la définition de f est un morphisme d'anneaux de A dans B .

Exercice 2 [5.5 points + Bonus]

Soit (G, \star) un groupe, $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des applications de G dans G bijectives et $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

1. Montrer que $(\text{Aut}(G); \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G); \circ)$.
2. Soit $a \in G$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_a : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto a \star x \star a^{-1} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que φ_a est un morphisme de groupe de $(G; \star)$.
- (b) [Bonus +1pt] Montrer que φ_a est bijective.
3. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ a &\longmapsto \varphi_a \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est un morphisme de groupe de $(G; \star)$ dans $(\text{Aut}(G); \circ)$.

4. Déterminer $\text{Ker}(\Psi)$.

Tournez svp \rightarrow

Exercice 3 [7 points] - Extrait du Concours d'inspecteurs des Impôts (2009)

Soit $(G, \#)$ un groupe, d'élément neutre e .



Sous-groupe distingué

On dit que D est un **sous-groupe distingué** de G si et seulement si

- (i) Stabilité par $\#$: $\forall h_1, h_2 \in D : h_1 \# h_2 \in D$
- (ii) Stabilité par passage au symétrique : $\forall h \in D : h^{-1} \in D$
- (iii) $\forall (g; h) \in G \times D : g \# h \# g^{-1} \in D$

1. Rappeler la définition de H est un sous-groupe de G .
2. Montrer que G et $\{e\}$ sont des sous-groupes distingués de G .
3. Montrer que si G est un groupe abélien, alors tout sous-groupe de G est un sous-groupe distingué.
4. Soit H un sous-groupe de G et N un sous-groupe distingué de G .
 - (a) Montrer que $N \cap H$ est un sous-groupe distingué de H .
 - (b) En déduire que si $N \subset H$, alors N est un sous-groupe distingué de H .
5. Soit $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes distingués de G .
Montrer que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i$ est un sous-groupe distingué de G .

Exercice 4 [2.5 points + Bonus]

Soit $(G; *)$ un groupe. On note

$$C = \{x \in G \mid \forall g \in G, g * x = x * g\}.$$

C est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G .

1. Montrer que $(C; *)$ est un sous-groupe de $(G; *)$.
2. [Bonus +1point] Si G est abélien, que vaut C ?

Fin. ♣