Département de Mathématiques
Année universitaire 2018-2019

CORRECTION DS4

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Date : 07/03/2019
Responsable : **Barrau Nelly**

Question de cours 1 *[5 points]*

1. Soit A un ensemble; $\boxplus$ et $\boxtimes$ deux lois de compositions internes sur A.
   Donner les définitions suivantes :
   (a) $(A; \boxplus)$ est un groupe commutatif :
   - $(A; \boxplus)$ est un magma : $\forall x, y \in A : \ x \boxplus y \in A$
   - $\boxplus$ est commutative dans A : $\forall x, y \in A : x \boxplus y = y \boxplus x$
   - $\boxplus$ est associative dans A : $\forall x, y, z \in A : (x \boxplus y) \boxplus z = x \boxplus (y \boxplus z)$
   - $(A; \boxplus)$ admet un élément neutre 0_A : $\forall x \in A : \ x \boxplus 0_A = 0_A \boxplus x = x$
   - Tout élément de A est symétrisable par $\boxplus$: $\forall x \in A, \ \exists x' \in A : \ x \boxplus x' = x' \boxplus x = 0_A$

   (b) $(A; \boxtimes)$ est un magma associatif,
   - $(A; \boxtimes)$ est un magma : $\forall x, y \in A : \ x \boxtimes y \in A$
   - $\boxtimes$ est associative dans A : $\forall x, y, z \in A : (x \boxtimes y) \boxtimes z = x \boxtimes (y \boxtimes z)$

   (c) $\boxtimes$ est distributive par rapport à $\boxplus$,
   $$\forall x, y, z \in A : \quad (x \boxplus y) \boxtimes z = (x \boxtimes z) \boxplus (y \boxtimes z) \ \text{ et } \ z \boxtimes (x \boxplus y) = (z \boxtimes x) \boxplus (z \boxtimes y)$$

2. Soit $(A; \boxplus; \boxtimes)$ un anneau et $B \subset A$. Donner la définition de B est un sous-anneau de A.
   - $(B; \boxplus)$ est un sous-groupe de $(A; \boxplus)$:
     - $0_A \in B$
     - Stabilité de $\boxplus$: $\forall x, y \in B : \ x \boxplus y \in B$
     - Stabilité par passage au symétrique :$\forall x \in B, \ x' \in B$
   - $1_A \in B$
   - B stable par $\boxtimes$: $\forall x, y \in B, \ x \boxtimes y \in B$

3. Soit $(A; \boxplus; \boxtimes)$, $(B; \oplus; \otimes)$ deux anneaux. Donner la définition de f est un morphisme d'anneaux de A dans B.
   - $f(1_A) = 1_B$
   - $\forall x, y \in A : \ f(x \boxplus y) = f(x) \oplus f(y)$
   - $\forall x, y \in A : \ f(x \boxtimes y) = f(x) \otimes f(y)$

Exercice 2 *[5.5 points + Bonus]*
Soit $(G, \star)$ un groupe, $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des applications de G dans G bijectives et $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $(Aut(G); \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G); \circ)$.
   Rappellons que
   - $f \in \mathcal{S}(G)$ signifie $f \in \mathcal{F}(G, G)$ et f bijective.
   - $f \in Aut(G)$ signifie $f \in \mathcal{F}(G, G)$ et f bijective et f est un morphisme de G dans G.

   Montrons que

— $0_{\mathcal{S}(G)} \in Aut(G)$:
$0_{\mathcal{S}(G)}$, l'élément neutre de $\mathcal{S}(G)$ pour la loi $\circ$, est à l'application identité de G dans G (ie $\forall x \in G : id_G(x) = x$).
Par définition, id_G est une application de G dans G et bijective ($id_G^{-1} = id_G$).
Il reste à montrer que id_G est un morphisme de G dans G : Soit $x, y \in G$. On a

$$id_G(x \star y) = x \star y = id_G(x) \star id_G(y)$$

id_G est bien un morphisme de G dans G. Finalement $\boxed{0_{\mathcal{S}(G)} \in Aut(G)}$.

— **Stabilité de** $\circ$: $\forall f, g \in Aut(G) :\ f \circ g \in Aut(G)$.
Soit $f, g \in Aut(G)$, ie $f, g \in \mathcal{F}(G, G)$, bijectives et sont des morphismes de G dans G.
Montrons que $f \circ g \in Aut(G)$. On a
— $f, g \in \mathcal{F}(G, G)$, donc par définition de la composition $f \circ g \in \mathcal{F}(G, G)$
— f, g bijectives, donc $f \circ g$ bijective (composée de fonctions bijectives - voir chapitre 2)
— $f, g \in Hom(G, G)$, alors $f \circ g \in Hom(G, G)$ (composée de morphismes - chap5 proposition 2.9)
Ainsi $\boxed{f \circ g \in Aut(G).}$

— **Stabilité par passage au symétrique** :$\forall f \in Aut(G),\ f^{-1} \in Aut(G)$.
Soit $f \in Aut(G)$, ie $f \in \mathcal{S}(G)$ et morphisme de G dans G. Montrons que $f^{-1} \in Aut(G)$.
Comme $f \in Aut(G)$, alors f^{-1} existe, $f^{-1} \in \mathcal{F}(G, G)$, bijective aussi.
De plus, l'application réciproque d'un morphisme reste un morphisme (chap5 proposition 2.10).
Donc $\boxed{f^{-1} \in Aut(G).}$

Finalement $\boxed{(Aut(G); \circ) \text{ est un sous-groupe de } (\mathcal{S}(G); \circ)}$

2. Soit $a \in G$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \star x \star a^{-1} \end{array}$$

(a) Montrer que φ_a est un morphisme de groupe de $(G; \star)$.
Soit $x, x' \in G$. Alors

$$\begin{array}{rcll} \varphi_a(x) \star \varphi_a(x') & = & (a \star x \star a^{-1}) \star (a \star x' \star a^{-1}) & \natural \text{ par définition de } \varphi_a \\ & = & a \star x \star (a^{-1} \star a) \star x' \star a^{-1} & \natural \text{ car } \star \text{ associative} \\ & = & a \star x \star (e_G) \star x' \star a^{-1} & \natural \text{ car } a^{-1} \text{ symétrique de a par } \star \\ & = & a \star (x \star x') \star a^{-1} & \natural \text{ car } e_G \text{ élément neutre de } (G, \star) \\ & = & \varphi_a(x \star x') & \natural \text{ par définition de } \varphi_a \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\varphi_a \in Hom(G, G)}$

(b) *[Bonus $+1pt$]* Montrer que φ_a est bijective.
Plusieurs options :
— φ_a est bijective si et seulement $\forall y \in G,\ \exists! x \in G : y = \varphi_a(x)$.
— φ_a est bijective si et seulement φ_a injective et surjective (avec Ker et Im par exemple).
— φ_a bijective si et seulement φ_a admet une application réciproque (symétrique par la loi $\circ$) : ie il existe $(\varphi_a)^{-1} \in \mathcal{S}(G)$ telle que $\varphi_a \circ \varphi_a^{-1} = \varphi_a^{-1} \circ \varphi_a = id_G$
Cherchons alors $\varphi_a^{-1} \in \mathcal{S}(G)$ telle que $\varphi_a \circ \varphi_a^{-1} = id_G$. Soit $x \in G$, il vient

$$\begin{array}{rcll} (\varphi_a \circ \varphi_a^{-1})(x) = x & \iff & \varphi_a(\varphi_a^{-1}(x)) = x & \natural \text{ par définition de la composée} \\ & \iff & a \star \varphi_a^{-1}(x) \star a^{-1} = x & \natural \text{ par définition de } \varphi_a \\ & \iff & \varphi_a^{-1}(x) \star a^{-1} = a^{-1} \star x & \natural \text{ par opération à gauche} \\ & \iff & \varphi_a^{-1}(x) = a^{-1} \star x \star a & \natural \text{ par opération à droite} \end{array}$$

On obtient $\varphi_a^{-1}(x) = a^{-1} \star x \star a$ est le symétrique à droite de φ_a. On vérifie que cette expression est également le symétrique à gauche (ie $\varphi_a^{-1}(\varphi_a(x)) = x$).
Finalement φ_a admet une application réciproque : donc $\boxed{\varphi_a \text{ est bijective.}}$

3. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Psi : G & \longrightarrow & Aut(G) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$$

Montrer que Ψ est un morphisme de groupe de $(G;\star)$ dans $(Aut(G);\circ)$
Montrons que $\forall a, b \in G : \Psi(a \star b) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$. Soit $a, b \in G$. On a $\Psi(a \star b) = \varphi_{a\star b}$.
Montrons alors que $\varphi_{a\star b} = \varphi_a \circ \varphi_b$. Soit $x \in G$, il vient :

$$\begin{array}{rcll} \varphi_{a\star b}(x) & = & (a \star b) \star x \star (a \star b)^{-1} & \natural \text{ par définition de } \varphi_a \\ & = & a \star b \star x \star b^{-1} \star a^{-1} & \natural \text{ par définition du symétrique de } a \star b \\ & = & a \star (b \star x \star b^{-1}) \star a^{-1} & \natural \text{ par associativité de } \star \\ & = & a \star (\varphi_b(x)) \star a^{-1} & \natural \text{ par définition de} \varphi_b \\ & = & \varphi_a(\varphi_b(x)) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) & \natural \text{ par définition de} \varphi_a \end{array}$$

Donc $\Psi(a \star b) = \varphi_{a\star b} = \varphi_a \circ \varphi_b = \Psi(a) \circ \Psi(b)$.
Finalement $\boxed{\Psi \text{ est un morphisme de } (G;\star) \text{ dans } (Aut(G);\circ)}$

4. Déterminer $Ker(\Psi)$.
On a

$$\begin{array}{rcll} a \in Ker(\Psi) & \Longleftrightarrow & \Psi(a) = id_G & \natural \text{ par définition du } Ker \\ & \Longleftrightarrow & \varphi_a = id_G & \natural \text{ par définition de } \Psi \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in G : \ \varphi_a(x) = id_G(x) & \natural \text{ par égalité d'application} \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in G : \ a \star x \star a^{-1} = x & \natural \text{ par définition de } \varphi_a \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in G : \ a \star x = x \star a & \natural \text{ par opération à droite} \end{array}$$

Finalement $\boxed{Ker(\Psi) = \{a \in G \mid \forall x \in G : \ a \star x = x \star a\}}$: $Ker(\Psi)$ contient les éléments de G qui commutent avec tous les autres élément de G. Il s'agit du centre de G.

Exercice 3 *[7 points] - Extrait du Concours d'inspecteurs des Impôts (2009)*
Soit $(G, \sharp)$ un groupe, d'élément neutre e.

Sous-groupe distingué

*On dit que D est un **sous-groupe distingué** de G si et seulement si*

(i) Stabilité par $\sharp$: $\forall h_1, h_2 \in D : \ h_1 \sharp h_2 \in D$
(ii) Stabilité par passage au symétrique : $\forall h \in D : \ h^{-1} \in D$
(iii) $\forall (g; h) \in G \times D : \ g \sharp h \sharp g^{-1} \in D$

1. Rappeler la définition de H est un sous-groupe de G.
— $0_G \in H$
— Stabilité de $\sharp$: $\forall x, y \in H : \ x \sharp y \in H$
— Stabilité par passage au symétrique :$\forall x \in H, \ x' \in H$
2. Montrer que G et $\{e\}$ sont des sous-groupes distingués de G.
Par définition, G et $\{e\}$ sont des sous-groupes (triviaux) de G : ils vérifient donc (i) et (ii) de la définition précédente. Montrons (iii) pour G et $\{e\}$:

Soit $g, h \in G$. Alors $g \sharp h \sharp g^{-1} \in G$ car $g, g^{-1}, h \in G$ et G stable par $\sharp$ (car G est un groupe).
De même, soit $g \in G$ et $h \in \{e\}$ (ie $h = e$). Alors

$$g \sharp h \sharp g^{-1} = g \sharp e \sharp g^{-1} = g \sharp g^{-1} = e \in \{e\}$$

Finalement $\boxed{G \text{ et } \{e\} \text{ sont des sous-groupes distingués de } G}$

3. Montrer que si G est un groupe abélien, alors tout sous-groupe de G est un sous-groupe distingué.
   Supposons G abélien, ie $\forall x, y \in G : x \sharp y = y \sharp x$.
   Montrons que tout sous-groupe de G est un sous-groupe distingué.
   Soit H un sous-groupe de G. Par définition de H (rappelée en 1.), ce dernier vérifie (i) et (ii) de la définition précédente. Montrons alors (iii). Soit $g \in G$ et $h \in H$. Alors, comme G est abélien, on a

$$g \sharp h \sharp g^{-1} = h \sharp g \sharp g^{-1} = h \sharp e = h \in H$$

   Donc H est un sous-groupe distingué.
4. Soit H un sous-groupe de G et N un sous-groupe distingué de G.
   (a) Montrer que $N \cap H$ est un sous-groupe distingué de H.
      (i) Stabilité par $\sharp$: Montrons que $\forall h_1, h_2 \in N \cap H : \ h_1 \sharp h_2 \in N \cap H$.
      Soit $h_1, h_2 \in N \cap H$, ie $h_1, h_2 \in N$ ET $h_1, h_2 \in H$.
      Alors $h_1 \sharp h_2 \in N$ (car N sous-groupe distingué) ET $h_1 \sharp h_2 \in H$ (car H sous-groupe) :
      Ainsi $\boxed{h_1 \sharp h_2 \in N \cap H}$
      (ii) Stabilité par passage au symétrique : Montrons que $\forall h \in N \cap H : \ h^{-1} \in N \cap H$
      Soit $h \in N \cap H$, ie $h \in N$ ET $h \in H$.
      Alors $h^{-1} \in N$ (car N sous-groupe distingué) ET $h^{-1} \in H$ (car H sous-groupe).
      Ainsi $\boxed{h^{-1} \in N \cap H}$
      (iii) Montrons que $\forall (g; h) \in H \times (N \cap H) : \ g \sharp h \sharp g^{-1} \in N \cap H$
      Soit $(g; h) \in H \times (N \cap H)$, ie $g \in H$, $h \in N$ ET $h \in H$.
      Alors $g \sharp h \sharp g^{-1} \in H$ (car $g, h \in H$ et H sous-groupe) ET $g \sharp h \sharp g^{-1} \in N$ (car $h \in N$, $g \in H \subset G$, et N sous-groupe distingué de G)
      Ainsi $\boxed{g \sharp h \sharp g^{-1} \in N \cap H}$
   Finalement $\boxed{N \cap H \text{ est un sous-groupe distingué de } H}$
   (b) En déduire que si $N \subset H$, alors N est un sous-groupe distingué de H.
      Supposons $N \subset H$. Alors $N \cap H = N$. D'après (a) : N est un sous-groupe distingué de H.
5. Soit $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes distingués de G.
   Montrer que $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i$ est un sous-groupe distingué de G.
   Par hypothèse, pour $i \in \mathbb{N}$, on a :
   (i) Stabilité par $\sharp$: $\forall h_1, h_2 \in N_i : \ h_1 \sharp h_2 \in N_i$
   (ii) Stabilité par passage au symétrique : $\forall h \in N_i : \ h^{-1} \in N_i$
   (iii) $\forall (g; h) \in G \times N_i : \ g \sharp h \sharp g^{-1} \in N_i$
   Montrons que $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i$ est un sous-groupe distingué de G, ie
   (i) *Stabilité par* $\sharp$ *:* $\forall h_1, h_2 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i : \ h_1 \sharp h_2 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i$.
      Soit $h_1, h_2 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i$ ie $\forall i \in I$, $h_1, h_2 \in N_i$. Comme $h_1, h_2 \in N_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors
      $h_1 \sharp h_2 \in N_i$ (car N_i sous-groupe distingué) pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{h_1 \sharp h_2 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i}$

(ii) *Stabilité par passage au symétrique* : $\forall h \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i : \; h^{-1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$.

Soit $h \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$, ie $\forall i \in \mathbb{N}, \; h \in N_i$. Comme $h \in N_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $h^{-1} \in N_i$ (car N_i sous-groupe distingué) pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{h^{-1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i}$

(iii) $\forall (g; h) \in G \times \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i : \; g \sharp h \sharp g^{-1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$.

Soit $g \in G, \; h \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$ ie $\forall i \in \mathbb{N}, \; h \in N_i$. Alors on a $g \sharp h \sharp g^{-1} \in N_i$ (car N_i sous-groupe distingué).

Or $\forall i \in \mathbb{N}, \; h \in N_i$ donc $\forall i \in \mathbb{N}, \; g \sharp h \sharp g^{-1} \in N_i$ ie $\boxed{g \sharp h \sharp g^{-1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i}$

Finalement $\boxed{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i \text{ est un sous-groupe distingué de } G}$

Exercice 4 *[2.5 points + Bonus]*

Soit $(G; *)$ un groupe. On note

$$C = \{x \in G \mid \forall g \in G, \; g * x = x * g\}.$$

C est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.

1. Montrer que $(C; *)$ est un sous-groupe de $(G; *)$.
   — $0_G \in C$:
   Par définition de l'élément neutre $0_G \in G$ et vérifie $\forall g \in G : g * 0_G = 0_G * g$ donc $\boxed{0_G \in C}$.
   — *Stabilité de* $*$ *:* $\forall x, y \in C : \; x * y \in C$.
   Soit $x, y \in C$, ie $\forall g \in G : g * x = x * g$ et $g * y = 0_G * y$.
   Montrons que $x * y \in C$ ie $\forall g \in G : (x * y) * g = g * (x * y)$.
   Soit $g \in G$. On a

$$\begin{array}{rcll} (x*y)*g & = & x*(y*g) & \sharp \text{ par associativité de } * \\ & = & x*(g*y) & \sharp \text{ car } y \in C \\ & = & (x*g)*y & \sharp \text{ par associativité de } * \\ & = & (g*x)*y & \sharp \text{ car } x \in C \\ & = & g*(x*y) & \sharp \text{ par associativité de } * \end{array}$$

   Donc $\boxed{x * y \in C}$
   — *Stabilité par passage au symétrique :* $\forall x \in C, \; x' \in C$
   Soit $x \in C$, ie $\forall g \in G : g * x = x * g$. Montrons que $x' \in C$ ie $\forall g \in G : x' * g = g * x'$.
   Soit $g \in G$. On a

$$\begin{array}{rcll} g*x = x*g & \iff & (g*x)*x' = (x*g)*x' & \sharp \text{ par opération à droite} \\ & \iff & g*(x*x') = x*(g*x') & \sharp \text{ par associativité de } * \\ & \iff & g = x*(g*x') & \sharp \text{ car } x*x' = e_G \\ & \iff & x'*g = (x'*x)*g*x' & \sharp \text{ par opération à gauche et associativité} \\ & \iff & x'*g = g*x' & \sharp \text{ car } x*x' = e_G \end{array}$$

   Donc $\boxed{x' \in C}$
2. *[Bonus +1point]* Si G est abélien, que vaut C ?
   Si G abélien, alors $\forall x, y \in G : x * y = y * x$ ie $C = G$.

Fin. ♣