EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Département de Mathématiques
Année universitaire 2018-2019

DS5 du 04/04/2019

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

— ***Aucun document*** *n'est autorisé,* ***Aucun appareil électronique*** *n'est autorisé.*
— *La* ***qualité de la rédaction*** *sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 22).*
— *Ce DS est composé de quatre exercices indépendants (dont deux ont une question bonus).*

Exercice 1 *[4 points + Bonus]*

Considérons l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

où ω est une constante réelle.

Cette équation régit toute une série de systèmes physiques, tels que l'oscillation d'un poids suspendu à un ressort, le mouvement d'un pendule ou encore la tension d'un circuit électrique.

Notons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ie indéfiniment dérivables). Enfin, soit $\omega \in \mathbb{R}$, définissons

$$\begin{array}{rccl} D : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & D(f) = f'' + \omega^2 f \end{array}$$

1. Donner la définition de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que D est un endomorphisme de E.
3. Donner les définitions du noyau et l'image de D.
4. *[Bonus +1pt]* Montrer que

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & sin(\omega t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & cos(\omega t) \end{array}$$

appartiennent au noyau de D.

Exercice 2 *[4 points]*
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

1. $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$
2. $f\,(Ker(g \circ f)) = Ker(g) \cap Im(f)$

[Indication pour (2.) : il s'agit bien ici de l'image directe de f.]

Tournez svp $\rightarrow$

Exercice 3 *[5 points + Bonus]*
Considérons

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-2z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$$

et $u = (1,1,1); v = (1,0,1)$ et $w = (0,1,1)$.

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E. S'agit-il d'une base de E ? Donner la dimension de E.
3. Montrer que $\{v; w\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{u; v; w\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
6. *[Bonus +1pt]* Soit $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de a dans la base $\{u; v; w\}$.

Exercice 4 *[7 points]*

PARTIE I Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Montrer que si $E = Vect\{u_1, ..., u_n\}$, alors $Im(f) = Vect\{f(u_1), ..., f(u_n)\}$

PARTIE II Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (6x-4y-4z; 5x-3y-4z; x-y) \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Rappeler la définition de $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $Ker(f)$ est la droite vectorielle engendrée par $u = (2,2,1)$.
4. Soit $v = (1,1,0)$ et $w = (0,1,-1)$.
   (a) Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
   (b) Montrer que $\{u; v; w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\{v, w\}$ est une base de $Im(f)$.
   (c) Déterminer $Im(f)$ par une autre méthode.
5. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Fin. ♣

"Le succès n'est pas final.
L'échec n'est pas fatal.
C'est le courage de continuer qui compte."
Winston Churchill