

CORRECTION DS5

Matière : Algèbre
 Filière : CPII - Pau
 Date : 4 Avril 2019
 Responsable : Barrau Nelly

Exercice 1 [4 points + Bonus]



Considérons l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

où ω est une constante réelle.

Cette équation régit toute une série de systèmes physiques, tels que l'oscillation d'un poids suspendu à un ressort, le mouvement d'un pendule ou encore la tension d'un circuit électrique.

Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ (ie indéfiniment dérivable). Enfin, soit $\omega \in \mathbb{R}$, définissons

$$D : E \longrightarrow E$$

$$f \longmapsto D(f) = f'' + \omega^2 f$$

1. Donner la définition de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est muni de la **loi de composition interne** + et de la **loi de composition externe** \times usuelles des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . E vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\forall f, g \in E : f + g = g + f$
- (b) $\forall f, g, h \in E : f + (g + h) = (f + g) + h$
- (c) $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall f \in E : f + 0_E = f$ (0_E est l'application nulle)
- (d) $\forall f \in E, \exists f' \in E : f + f' = 0_E$ ($f' = -f$)
- (e) $\forall f \in E : 1_{\mathbb{K}} \times f = f$
- (f) $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall f \in E : a \times (b \times f) = (a \times b) \times f$
- (g) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall f, g \in E : a \times (f + g) = (a \times f) + (a \times g)$
- (h) $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall f \in E : (a + b) \times f = (a \times f) + (b \times f)$

2. Montrer que D est un endomorphisme de E .

Montrons que $D \in \mathcal{F}(E, E)$ et $\forall f, g \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$.

D'après l'énoncé, $D \in \mathcal{F}(E, E)$. Montrons que D est un morphisme : Soit $f, g \in E; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
 D(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)'' + \omega^2(\alpha f + \beta g) && \# \text{ par définition de } D \\
 &= \alpha f'' + \beta g'' + \omega^2(\alpha f + \beta g) && \# \text{ la dérivée seconde est linéaire} \\
 &= \alpha f'' + \beta g'' + \alpha \omega^2 f + \beta \omega^2 g && \# \text{ par distributivité de } x \text{ sur } +, E \text{ est un } \mathbb{R} - EV \\
 &= \alpha f'' + \alpha \omega^2 f + \beta g'' + \beta \omega^2 g && \# \text{ par commutativité et associativité de } + \text{ dans } E \\
 &= \alpha(f'' + \omega^2 f) + \beta(g'' + \omega^2 g) && \# \text{ par distributivité de } x \text{ sur } + \\
 &= \alpha D(f) + \beta D(g) && \# \text{ par définition de } D
 \end{aligned}$$

Ainsi D est bien un endomorphisme de E

3. Donner les définitions du noyau et l'image de D .
 — $Ker(D) = \{f \in E \mid D(f) = 0_E\} = \{f \in E \mid f'' + \omega^2 f = 0_E\}$
 — $Im(D) = D(E) = \{g \in E \mid \exists f \in E, D(f) = g\} = \{D(f) \mid f \in E\}$
4. [Bonus +1pt] Montrer que

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\omega t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(\omega t) \end{array}$$

appartiennent au noyau de D .

$$f, g \in Ker(D) \iff D(f) = D(g) = 0_E \text{ ie } \forall t \in \mathbb{R} : D(f)(t) = D(g)(t) = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} D(f)(t) &= f''(t) + \omega^2 f(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) = 0, \\ D(g)(t) &= g''(t) + \omega^2 g(t) = -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la dérivée, et les dérivées de \sin et \cos .

Ainsi $f, g \in Ker(D)$

Exercice 2 [4 points]

Soit E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

1. $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.

Soit $x \in Ker(f)$. Montrons que $x \in Ker(g \circ f)$.

$$\begin{array}{lll} \underline{x \in Ker(f)} & \iff & f(x) = 0_F & \# \text{ par définition du noyau de } f \\ & \implies & g(f(x)) = g(0_F) & \# \text{ par composition par } g \\ & \implies & g(f(x)) = 0_G & \# \text{ car } g \text{ linéaire} \\ & \implies & (g \circ f)(x) = 0_G & \# \text{ définition de la composition} \\ & \implies & \underline{x \in Ker(g \circ f)} & \# \text{ définition du noyau de } g \circ f \end{array}$$

ainsi $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$

2. $f(Ker(g \circ f)) = Ker(g) \cap Im(f)$

Démontrons cette égalité par équivalences successives. Soit $y \in f(Ker(g \circ f))$ (donc $y \in F$).

Alors

$$\begin{array}{lll} \underline{y \in f(Ker(g \circ f))} & \iff & \exists x \in Ker(g \circ f) : y = f(x) & \# \text{ par déf de l'image directe de } f \\ & \iff & \exists x \in E : ((g \circ f)(x) = 0_G \text{ et } y = f(x)) & \# \text{ par déf du noyau de } g \circ f \\ & \iff & \exists x \in E : (g(y) = 0_G \text{ et } y = f(x)) & \# \text{ car } y = f(x) \\ & \iff & g(y) = 0_G \text{ et } (\exists x \in E : y = f(x)) & \# \text{ par distributivité du } \exists \\ & \iff & y \in Ker(g) \text{ et } y \in Im(f) & \# \text{ par déf du noyau et de l'image} \\ & \iff & \underline{y \in Ker(g) \cap Im(f)} & \# \text{ par déf de } \cap \end{array}$$

ainsi $f(Ker(g \circ f)) = Ker(g) \cap Im(f)$

Exercice 3 [5 points + Bonus]

Considérons

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

et $u = (1, 1, 1)$; $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

On a

$$\begin{aligned}
 E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\} & F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + 2z \text{ et } z = 2(-y + 2z) - y\} & &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = y\} & &= \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & &= \underline{\text{Vect}\{(1, 0, 1); (0, 1, 1)\} = \text{Vect}\{v; w\}} \\
 &= \underline{\text{Vect}\{(1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{u\}}
 \end{aligned}$$

E et F sont donc des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer une famille génératrice de E . S'agit-il d'une base de E ? Donner la dimension de E .

D'après la question précédente : $E = \text{Vect}\{u\}$ donc $\{u\}$ est une famille génératrice de E .

De plus, $\{u\}$ forme une famille libre : $\{u\}$ est donc d'une base de E : donc $\dim(E) = 1$

3. Montrer que $\{v; w\}$ est une base de F .

Montrons que $\{v; w\}$ est une famille génératrice et libre de F .

D'après la question 1, $F = \text{Vect}\{v; w\}$. $\{v; w\}$ est donc une famille génératrice de F .

Montrons que cette famille est libre : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha = \beta = 0$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et supposons $\alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

$\{v; w\}$ est donc une famille libre de F . Ainsi $\{v; w\}$ est une base de F

4. Montrer que $\{u; v; w\}$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, et supposons

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi $\{u; v; w\}$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

5. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?

D'après ce qui précède, on a $\dim(E) = 1$, $\dim(F) = 2$.

De plus, la famille $\{u; v; w\}$ est libre, ie $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ainsi $\dim(E \cap F) = 0$.

Enfin, en utilisant le théorème des 4 dimensions

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Finalement $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$

6. [Bonus +1pt] Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de a dans la base $\{u; v; w\}$.

On cherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = a \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= x \quad (1) \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= y \quad (2) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= z \quad (3) \end{cases}$$

(3) - (1) : $\alpha_3 = z - x$; (2) : $\alpha_1 = y - \alpha_3 = x + y - z$ et (1) : $\alpha_2 = x - \alpha_1 = -y + z$.

Finalement les coordonnées de a dans la base $\{u; v; w\}$ sont $(x + y - z; -y + z; -x + z)$.

Exercice 4 [7 points]

PARTIE I Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que si $E = Vect\{u_1, \dots, u_n\}$, alors $Im(f) = Vect\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$

Supposons $E = Vect\{u_1, \dots, u_n\}$, ie $\forall x \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$.

Montrons que $Im(f) = Vect\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ ie $\forall y \in Im(f), \exists \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} : y = \sum_{i=1}^n \beta_i f(u_i)$.

Soit $y \in Im(f)$. Par définition de l'image (directe) de f , il vient

$$\begin{aligned} y \in Im(f) &\Leftrightarrow \exists x \in E : y = f(x) && \# \text{ par définition de } Im(f) \\ &\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : y = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) && \# \text{ par hypothèse sur } E \\ &\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) && \# \text{ car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &\Rightarrow y \in Vect\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} && \# \text{ par définition du } Vect \end{aligned}$$

PARTIE II Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (6x - 4y - 4z; 5x - 3y - 4z; x - y) \end{aligned}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Montrons que

$$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha(x, y, z) + (x', y', z')) = \alpha f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

Soit $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\alpha x + x'; \alpha y + y'; \alpha z + z') && \# \mathbb{R}^3 \text{ est un } \mathbb{R} - EV \\ &= (6X - 4Y - 4Z; 5X - 3Y - 4Z; X - Y) && \# \text{ par définition de } f \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Rappeler la définition de \mathcal{B} .

On a $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)\}$

3. Montrer que $Ker(f)$ est la droite vectorielle engendrée par $u = (2, 2, 1)$.

Par définition $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ ie

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (6x - 4y - 4z; 5x - 3y - 4z; x - y) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x/2 \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f) = \{(x; x; x/2) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(2, 2, 1)\}$.

4. Soit $v = (1, 1, 0)$ et $w = (0, 1, -1)$.

(a) Calculer $f(v)$ et $f(w)$.

On a $f(v) = f(1, 1, 0) = (2; 2; 0) = 2v$ et $f(w) = f(0, 1, -1) = (0; 1; -1) = w$

(b) Montrer que $\{u; v; w\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . En déduire que $\{v, w\}$ est une base de $Im(f)$.

(c) Déterminer $Im(f)$ par une autre méthode.

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} && \# \text{ par définition de l'image} \\ &= \{(6x - 4y - 4z; 5x - 3y - 4z; x - y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} && \# \text{ par définition de } f \\ &= \{x(6, 5, 1) + y(-4, -3, -1) + z(-4, -4, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} && \# \text{ par propriété dans } \mathbb{R}^3 \\ &= Vect\{a = (6, 5, 1); b = (-4, -3, -1); c = (-4, -4, 0)\} && \# \text{ par définition du } Vect \end{aligned}$$

De manière évidente, $a + b = -2c$ donc $Im(f) = Vect\{a; b\}$. De plus,

$\{a; b\}$ est une famille libre : $\{a; b\}$ est donc une base de $Im(f)$. $Dim(Im(f)) = 2$

5. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Fin. ♣