EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Département de Mathématiques
Année universitaire 2018-2019

CORRECTION DS6

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Date : **16/05/2019**
Responsable : **Barrau Nelly**

Question de cours 1 *[4 points]* Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt). Aucune justification n'est demandée. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$.

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
3. $tr({}^tA) = tr(A)$
4. $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$
5. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A$
6. $dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
7. $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
8. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$

Exercice 2 *[6 points]*
Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, {}^tA = -A\}$, et $\varphi : F \longrightarrow F$ une application linéaire définie par

$$\forall\ A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in F\ (a, b, c \in \mathbb{R}) : \quad \varphi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2a-b+c & 3b+c \\ -2a+b-c & 0 & 4c \\ -3b-c & -4c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Donner la dimension et $\mathcal{B}$ la base canonique de F. Comment se nomme l'espace F ?
On a $A \in F$ signifie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = -A$. Il vient

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}$$

Ainsi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \mid b, c, f \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Cette famille est clairement libre, il s'agit de la base (canonique) de F (notée $\mathcal{B}$ dans la suite) donc $dim(F) = 3$. Il s'agit de l'ensemble des matrices antisymétriques.

2. Déterminer M la matrice associée à φ dans la base canonique de F.
Il vient

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1; \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_1 + 3e_2, \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + 4e_3$$

Ainsi
$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Calculer M^2. Exprimer, en fonction de φ, l'application linéaire associée à M^2.
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$
$\boxed{M^2 \text{ est la matrice associée à l'application } \varphi^2 = \varphi \circ \varphi \text{ dans la base } \mathcal{B}.}$

4. Sans calcul, justifier que $M \in GL_3(\mathbb{R})$ et que φ est un automorphisme de F.
M est une matrice triangulaire supérieure, dont aucun des éléments diagonaux n'est nul : $\boxed{M \text{ est donc inversible}}$, ie φ est bijective.
De plus, $\varphi \in \mathscr{L}(F, F)$ d'après l'énoncé : $\boxed{\varphi \text{ est donc un automorphisme de } F.}$

5. Déterminer l'inverse de M.
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

6. Donner l'image et le noyau de φ.
D'après la question 4, φ est bijective : ainsi $\boxed{Ker(\varphi) = \{0_F\} \text{ et } Im(\varphi) = F.}$

Exercice 3 *[10 points + Bonus]* Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.
Considérons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PARTIE I Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer que le noyau de f est engendré par la droite vectorielle $a = (1, -1, 1)$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in Ker(f) \iff f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En l'absence de l'expression analytique de f, on utilise sa matrice associée :
$$\begin{array}{rcll} (x,y,z) \in Ker(f) & \iff & f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} & \sharp \text{ par définition de f} \\ & \iff & A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \sharp \text{ interprétation matricielle} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x - y - 2z & = & 0 \\ -x + y + 2z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{array}\right. & \sharp \text{ système issu du produit matriciel} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & z \end{array}\right. & \sharp \text{ résolution du système} \\ & \iff & (x,y,z) \in Vect\{(1,-1,1)\} & \end{array}$$
Finalement $\boxed{Ker(f) = Vect\{(1, -1, 1)\}.}$

2. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(b) = a$.
On cherche $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(b) = a = (1, -1, 1)$. En l'absence d'expression

analytique de f, on utilise sa matrice associée

$$\begin{array}{rcll} f(b)=a & \iff & A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} & \sharp \text{ interprétation matricielle}\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x-y-2z&=&1\\ -x+y+2z&=&-1\\ x-z&=&1\end{array}\right. & \sharp \text{ système issu du produit matriciel}\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} y&=&-z\\ x&=&1+z\end{array}\right. & \sharp \text{ résolution du système}\end{array}$$

On peut prendre $z=0$, on obtient alors $\boxed{b=(1,0,0).}$
Remarque. On note que la première colonne de A correspond précisément au vecteur a.

3. Déterminer $c\in\mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(c)=c$. On cherche $c=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(c)=c$. En l'absence d'expression analytique de f, on utilise sa matrice associée

$$\begin{array}{rcll} f(c)=c & \iff & A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \sharp \text{ interprétation matricielle}\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x-y-2z&=&x\\ -x+y+2z&=&y\\ x-z&=&z\end{array}\right. & \sharp \text{ système issu du produit matriciel}\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} y&=&-2z\\ x&=&2z\end{array}\right. & \sharp \text{ résolution du système linéaire}\end{array}$$

ie $c\in Vect\{(2,-2,1)\}$. On peut prendre par exemple $\boxed{c=(2,-2,1).}$

4. Supposons que $\mathcal{C}=\{a;b;c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $T=Mat_{\mathcal{C}}(f)$.
On a $f(a)=0_{\mathbb{R}^3}$ (car $a\in Ker(f)$ d'après 1); $f(b)=a$ (d'après 2) et $f(c)=c$ (d'après 3). Ainsi
$$T=Mat_{\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5. Donner Q_1 la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
$$Q_1=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}=Mat_{\mathcal{B}}(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

6. Donner la relation entre A,T et Q_1.
$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\times Mat_{\mathcal{C}}(f)\times P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \iff A=Q_1\,T\,Q_1^{-1} \iff \boxed{T=Q_1^{-1}\,A\,Q_1}$$

PARTIE II Soit $g:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par
$$g(P)=(2+X+X^2)P-(1+2X+X^2+X^3)P'+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)P''$$

Considérons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F}=\{f_1=1+X+X^2;f_2=1+X;f_3=2+X+X^2\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer $g(1),g(X),g(X^2)$. En déduire que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{array}{rcl} g(1)&=&(2+X+X^2)\times1-(1+2X+X^2+X^3)\times0+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)\times0=\underline{2+X+X^2}\\ g(X)&=&(2+X+X^2)X-(1+2X+X^2+X^3)1+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)0=\underline{-1}\\ g(X^2)&=&(2+X+X^2)X^2-(1+2X+X^2+X^3)2X+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)2=\underline{-1-X-X^2}\end{array}$$

Il vient alors

$$g(\alpha + \beta X + \gamma X^2) = \alpha g(1) + \beta g(X) + \gamma g(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$$

car $g(1), g(X), g(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc $\boxed{g \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

2. Déterminer B la matrice associée à g dans la base $\mathcal{E}$.
   En utilisant les résultats de la question précédente (et en posant $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$) :

$$\begin{array}{rcl} g(1) & = & 2 + X + X^2 = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ g(X) & = & -1 = -e_1 \\ g(X^2) & = & -1 - X - X^2 = -e_1 - e_2 - e_3 \end{array}$$

   On obtient ainsi

$$B = Mat_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer T' la matrice associée à g dans la base $\mathcal{F}$.

$$\begin{array}{rcl} Mat_{\mathcal{E}}(g(f_1)) & = & B \times Mat_{\mathcal{E}}(f_1) = B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{g(f_1) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3} \\ Mat_{\mathcal{E}}(g(f_2)) & = & B \times Mat_{\mathcal{E}}(f_2) = B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{E}}(f_1) \Leftrightarrow \underline{g(f_2) = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3} \\ Mat_{\mathcal{E}}(g(f_3)) & = & B \times Mat_{\mathcal{E}}(f_3) = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{E}}(f_3) \Leftrightarrow \underline{g(f_3) = 0f_1 + 0f_2 + 1f_3} \end{array}$$

   Il vient alors

$$T' = Mat_{\mathcal{F}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

4. Posons $Q_2 = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Donner la relation entre B, T' et Q_2.

$$Mat_{\mathcal{F}}(g) = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \times Mat_{\mathcal{E}}(g) \times P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \boxed{T' = Q_2^{-1} B Q_2}$$

PARTIE III *[Bonus + 2pt]*

Montrer que A et B sont deux matrices semblables.
A et B sont semblables si et seulement si il existe $R \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = R^{-1}BR$.
D'après ce qui précède

$$T' = T \Leftrightarrow Q_2^{-1} B Q_2 = Q_1^{-1} A Q_1 \Leftrightarrow Q_1 Q_2^{-1} B Q_2 Q_1^{-1} = A \Leftrightarrow \boxed{(Q_2 Q_1^{-1})^{-1} B (Q_2 Q_1^{-1}) = A}$$

De plus, $Q_1, Q_2 \in GL_3(\mathbb{R})$. Ainsi $\underline{R = Q_2 Q_1^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})}$.

Fin. ♣