EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Année universitaire 2018-2019
CPI $1^{ère}$ année - Pau

CORRECTION DS1 du 11/10/2018
Matière : **Algèbre** Durée : **2h** Responsable : **Barrau Nelly**

Question de cours 1 *[5 points]* **Réponse exacte/fausse (±0.5pt), Pas de réponse (0pt).**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
3. f est croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$
4. f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c$
5. f est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)$
6. f n'est pas la fonction nulle : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
7. f s'annule sur $\mathbb{R}$: $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
8. f est strictement décroissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$
9. f est une fonction affine : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$
10. f est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$

Exercice 1 *[4 points]* Soit E un ensemble et I un ensemble d'indices. Considérons A une partie de E et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

1. $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$
Démontrons cette égalité par équivalence successives :
Soit $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } \left(x \in \bigcup_{i \in I} B_i \right) && \sharp \text{ définition de } \cap \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (\exists i \in I, x \in B_i) && \sharp \text{ définition de } \bigcup_{i \in I} \ldots \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : (x \in A) \text{ et } (x \in B_i) && \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in (A \cap B_i) && \sharp \text{ définition de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) && \sharp \text{ définition de } \bigcup_{i \in I} \ldots
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)}$

2. $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

Démontrons cette égalité par équivalence successives :

Soit $x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) & \Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } \left(x \in \bigcap_{i \in I} B_i \right) & \sharp \text{ définition de } \cup \\
& \Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (\forall i \in I, x \in B_i) & \sharp \text{ définition de } \bigcap_{i \in I} \ldots \\
& \Leftrightarrow \forall i \in I : (x \in A) \text{ ou } (x \in B_i) & \\
& \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in (A \cup B_i) & \sharp \text{ définition de } \cap \\
& \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) & \sharp \text{ définition de } \bigcap_{i \in I} \ldots
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)}$

Exercice 2 *[3 points]*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}}, \qquad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n$.

Procédons par récurrence double : posons $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : "$u_n = 2^n$".

Initialisation Deux rangs sont à vérifier :

$n = 0$: $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $2^0 = 1$. Ainsi $\boxed{P_0 \text{ est vérifiée.}}$

$n = 1$: $u_1 = 2$ d'après l'énoncé et $2^1 = 2$. Ainsi $\boxed{P_1 \text{ est vérifiée.}}$

Récurrence Supposons pour n fixé que P_n et P_{n+1} sont vraies, ie $u_n = 2^n$ (HR1) et $u_{n+1} = 2^{n+1}$ (HR2). Montrons que P_{n+2} est vraie aussi, ie $u_{n+2} = 2^{n+2}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n}, & \sharp \text{ énoncé} \\
&= \frac{(2^{n+1})^2}{2^n}, & \sharp \text{ d'après HR1 et HR2} \\
&= 2^{2n+2-n}, & \sharp \text{ propriété des puissances} \\
&= 2^{n+2}, & \sharp \text{ simplification}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P_{n+2} \text{ est vérifiée.}}$

Conclusion Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n.}$

Exercice 3 *[8 points]*
On considère les propositions suivantes :

P "L'utilisateur appuie sur la touche *Echap*"
Q "L'utilisateur appuie sur la touche *Entrer*"
R "Le programme se plante"
S "Le fichier est effacé"

On définit les trois propositions suivantes :

A "Si l'utilisateur appuie sur *Entrer*, alors le programme ne se plante pas"

B "Le fichier est effacé si le programme se plante ou que l'utilisateur appuie sur *Echap*"

C "Le programme se plante et le fichier est effacé si l'utilisateur appuie sur les deux touches *Echap* et *Entrer*".

1. À l'aide de quantificateurs et d'opérateurs, exprimer A, B et C en fonction des propositions P, Q, R et S.
   — Proposition A : $Q \Rightarrow \overline{R}$
   — Proposition B : $(R \text{ ou } P) \Rightarrow S$
   — Proposition C : $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (R \text{ et } S)$
2. Donner les tables de vérités associées aux règles A, B et C.

Q	R	$\overline{R}$	A
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Table de vérité de A

P	R	S	P ou R	B
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Table de vérité de B

P	Q	R	S	P et Q	R et S	C
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V

Table de vérité de C

3. Lorsque cela est possible, écrire :
   (a) Contraposée de A : $\left(R \Rightarrow \overline{Q}\right)$
   (b) Réciproque de B : $S \Rightarrow (R \text{ ou } P)$
   (c) Négation de C : $\overline{(P \text{ et } Q) \Rightarrow (R \text{ et } S)} \iff (P \text{ et } Q) \text{ et } (\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$

Fin.

Exercice 4 *Bonus [3 points]*
Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que $p\ C_n^p = n\ C_{n-1}^{p-1}$.
   Notons que $p\ C_n^p$ vaut le même résultat pour $p \in [\![0,n]\!]$ et pour $p \in [\![1,n]\!]$. Plaçons nous donc pour $p \in [\![1,n]\!]$ (afin que $(p-1)!$ aient toujours un sens) :

$$p\ C_n^p = \frac{p\ n!}{p!\ (n-p)!} = \frac{p\ n(n-1)!}{p(p-1)!\ (n-1-(p-1))!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\ (n-1-(p-1))!} = n\ C_{n-1}^{p-1}$$

2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{n} p\ C_n^p = n2^{n-1}.$$

   Il vient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} p\ C_n^p &= 0C_n^0 + \sum_{p=1}^{n} p\ C_n^p = \sum_{p=1}^{n} p\ C_n^p \\
&= \sum_{p=1}^{n} n\ C_{n-1}^{p-1} && \sharp \text{ d'après 1.} \\
&= n\sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} && \sharp \text{ car n indépendant de p} \\
&= n\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p} && \sharp \text{ par changement d'indice} \\
&= n\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p}\ 1^p\ 1^{n-1-p} && \sharp \text{ utilisation du binôme de Newton} \\
&= n2^{n-1} && \sharp \text{ Formule Binôme : } (1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p}\ 1^p\ 1^{n-1-p}
\end{aligned}$$

   Finalement $\boxed{\sum_{p=0}^{n} p\ C_n^p = n2^{n-1}.}$