Année universitaire 2018-2019
CPI $1^{ère}$ année - Pau

DS1 du 11/10/2018

Matière : **Algèbre**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

— *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
— *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif.*
Ce DS est composé de questions de cours, trois exercices indépendants et d'un exercice bonus.

Question de cours 1 *[5 points]*
Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. f est la fonction nulle
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
3. f est croissante
4. f est constante
5. f est 2π-périodique
6. f n'est pas la fonction nulle
7. f s'annule sur $\mathbb{R}$
8. f est strictement décroissante
9. f est une fonction affine
10. f est paire

Exercice 1 *[4 points]*
Soit E un ensemble et I un ensemble d'indices. Considérons A une partie de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.
Montrer que

1. $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$
2. $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$

Exercice 2 *[3 points]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_n &= \dfrac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}}, \qquad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n$.

Tournez svp $\to$

Exercice 3 *[8 points]*
On considère les propositions suivantes :

P "L'utilisateur appuie sur la touche *Echap*"
Q "L'utilisateur appuie sur la touche *Entrer*"
R "Le programme se plante"
S "Le fichier est effacé"

On définit les trois propositions suivantes :

A "Si l'utilisateur appuie sur *Entrer*, alors le programme ne se plante pas"

B "Le fichier est effacé si le programme se plante ou que l'utilisateur appuie sur *Echap*"

C "Le programme se plante et le fichier est effacé si l'utilisateur appuie sur les deux touches *Echap* et *Entrer*".

1. À l'aide de quantificateurs et d'opérateurs, exprimer A, B et C en fonction des propositions P, Q, R et S.
2. Donner les tables de vérités associées aux règles A, B et C.
3. Lorsque cela est possible, écrire :
   (a) La contraposée de A, (b) La réciproque de B, (c) La négation de C.

Fin.

Exercice 4 *Bonus [3 points]*
Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer que $p\ C_n^p = n\ C_{n-1}^{p-1}$.
2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{n} p\ C_n^p = n2^{n-1}.$$