

**Question de cours 1 [6.5 points]**

Soit  $E, F$  deux ensembles,  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(F)$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(E; F)$ .

1. Définir l'image directe de  $A$  et l'image réciproque de  $B$ .

L'image directe de  $A$  par  $f$  est l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{y \in F; \exists x \in A, y = f(x)\}$$

L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image appartient à  $B$  :

$$f_{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

2. Démontrer que :

- (a)  $A \subset f_{-1}(f(A))$ . Soit  $x \in A$ . Montrons que  $x \in f_{-1}(f(A))$ .

$$\begin{aligned} x \in A &\implies f(x) \in f(A) && \# \text{ car } f \text{ est une application} \\ &\implies x \in f_{-1}(f(A)) && \# \text{ par définition de l'image réciproque} \end{aligned}$$

Finalement  $A \subset f_{-1}(f(A))$

- (b)  $f(f_{-1}(B)) \subset B$ . Soit  $y \in f(f_{-1}(B))$ . Montrons que  $y \in B$ .

$$\begin{aligned} y \in f(f_{-1}(B)) &\iff \exists x \in f_{-1}(B) : y = f(x) && \# \text{ par définition de l'image directe} \\ &\implies \exists f(x) \in B : y = f(x) && \# \text{ par définition de l'image réciproque} \\ &\implies y \in B && \# \text{ car } y = f(x) \end{aligned}$$

Finalement  $f(f_{-1}(B)) \subset B$

3. Donner la définition de :

- (a) l'injectivité de  $f : f$  est injective si tout élément de  $F$  a au plus un antécédent dans  $E$  :

$$\forall x_1, x_2 \in E : (f(x_1) = f(x_2)) \implies x_1 = x_2.$$

- (b) la surjectivité de  $f : f$  est surjective si tout élément de  $F$  a au moins un antécédent dans  $E$  :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

4. Démontrer que :

- (a) Si  $f$  est injective, alors  $A = f_{-1}(f(A))$ .

Supposons  $f$  injective, ie  $\forall x_1, x_2 \in E : (f(x_1) = f(x_2)) \implies x_1 = x_2$ .

Montrons que  $A = f_{-1}(f(A))$ . Démontrons cette égalité par double inclusion :

$\subseteq$  D'après 2(a), on a déjà démontré  $A \subset f_{-1}(f(A))$ .

$\supseteq$  Montrons que  $f_{-1}(f(A)) \subset A$ .

Soit  $x \in f_{-1}(f(A))$ . Alors par définition de l'image réciproque, on a  $f(x) \in f(A)$ .

Posons  $y = f(x)$ . Alors

$$y \in f(A) \iff \exists x' \in A : y = f(x') \quad \# \text{ déf. image directe}$$

ie  $y = f(x) = f(x')$ . Or  $f$  est injective, donc  $x = x'$ , ie  $x \in A$  (car  $x' \in A$ ).

Ainsi  $f_{-1}(f(A)) \subset A$ .

Finalement,  $A = f_{-1}(f(A))$ .

(b) Si  $f$  est surjective, alors  $f(f_{-1}(B)) = B$ .

Supposons  $f$  surjective, ie  $(\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)) \iff (F = f(E))$ .

Montrons que  $f(f_{-1}(B)) = B$ . Démontrons cette égalité par double inclusion :

$\subseteq$  D'après 2(b), on a déjà démontré  $f(f_{-1}(B)) \subset B$ .

$\supseteq$  Montrons que  $B \subset f(f_{-1}(B))$ .

Soit  $y \in B$ . Alors comme  $f$  est surjective et  $B \subset F, \exists x \in E : y = f(x)$ .

De plus,  $y \in B$ , donc par définition de l'image réciproque  $f(x) \in B \iff x \in f_{-1}(B)$  : donc

$y = f(x) \in f(f_{-1}(B))$ .

Ainsi  $B \subset f(f_{-1}(B))$

Finalement  $f(f_{-1}(B)) = B$ .

5. Considérons  $E = F = \{-1; 0; 1\}$ ,  $A = \{1\}$ ,  $B = \{-1; 1\}$  et

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

(a) Donner le graphe de  $f$  :

Le graphe de  $f$  est

$$\Gamma = \{(x; f(x)); x \in E\} = \{(-1; 1); (0; 0); (1; 1)\}$$

(b) L'application  $f$  est-elle injective ? Surjective ?

L'application  $f$  est non injective car d'après le graphe précédent  $-1$  et  $1$  ont même image.

L'application  $f$  est non surjective car d'après le graphe précédent  $y = -1$  n'a pas d'antécédent.

(c) Écrire en extension les ensembles  $f_{-1}(f(A))$  et  $f(f_{-1}(B))$ .

$$f_{-1}(f(A)) = f_{-1}(f(\{1\})) = f_{-1}(\{f(1)\}) = f_{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$$

et

$$f(f_{-1}(B)) = f(f_{-1}(\{-1; 1\})) = f(\{-1; 1\}) = \{1\}$$

## Exercice 2 [4.5 points]

On définit la relation  $\propto$  sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 : a \propto b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka.$$

1. Montrer que  $\propto$  est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .

$\propto$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^*$  ssi :

—  $\propto$  est réflexive :  $\forall a \in \mathbb{N}^* : a \propto a$ .

Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ , on a  $a \propto a \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : a = ka$ . Pour  $k = 1 \in \mathbb{N}^* : a = ka$ . Donc  $\propto$  est réflexive.

—  $\propto$  est antisymétrique :  $\forall a, b \in \mathbb{N}^* : (a \propto b \text{ et } b \propto a) \Rightarrow a = b$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $(a \propto b \text{ et } b \propto a)$ . Montrons que  $a = b$ . On a

$$a \propto b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka \quad \text{et} \quad b \propto a \iff \exists k' \in \mathbb{N}^* : a = k'b$$

ie  $b = ka = k(k'b) = kk'b$ . En simplifiant par  $b \neq 0$ , il vient  $kk' = 1$ . Or  $k, k' \in \mathbb{N}^*$  : donc la seule solution à  $kk' = 1$  est  $k = k' = 1$ . On en déduit donc que  $a = b$  :  $\propto$  est antisymétrique.

—  $\propto$  est transitive :  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^* : (a \propto b \text{ et } b \propto c) \Rightarrow a \propto c$ .

Soit  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $(a \propto b \text{ et } b \propto c)$ . Montrons que  $a \propto c$ .

On a

$$a \propto b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka \quad \text{et} \quad b \propto c \iff \exists k' \in \mathbb{N}^* : c = k'b$$

donc  $c = k'b = k'(ka) = kk'a$ . Or  $k, k' \in \mathbb{N}^*$ , donc  $k'' = kk' \in \mathbb{N}^*$ .

Ainsi  $\exists k'' \in \mathbb{N}^* : c = k''a \iff a \propto c$  : donc  $\propto$  est transitive

De plus, il existe des couples de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  qui ne sont pas en relation  $\propto$  : par exemple  $2, 3 \in \mathbb{N}^*$ , mais on a ni  $2 \propto 3$ , ni  $3 \propto 2$ .  $\propto$  est donc une relation d'ordre partiel.

2. L'ensemble ordonné  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

— Plus petit élément : Si  $a \propto b$ , alors  $a \leq b$  puisque  $b = ka$  avec  $k \geq 1$ . Donc si  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  admet un plus petit élément, cela ne peut être que le plus petit élément de  $\mathbb{N}^*$  (par la relation  $\leq$ ) : c'est-à-dire 1. 1 est-il le plus petit élément de  $\mathbb{N}^*$  par la relation  $\propto$  ? En effet (pour  $k = a$ ) :

$$\forall a \in \mathbb{N}^* : 1 \propto a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : a = k \times 1$$

donc 1 est le plus petit élément de  $(\mathbb{N}^*; \propto)$ .

— Plus grand élément : Sur le même principe, si  $a \propto b$ , alors  $a \leq b$  puisque  $b = ka$  avec  $k \geq 1$ . Donc si  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  admet un plus grand élément, cela ne peut être que le plus grand élément de  $\mathbb{N}^*$  (par la relation  $\leq$ ). Or ce dernier n'a pas de plus grand élément !

Montrons donc que  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  n'admet pas de plus grand élément, en raisonnant par l'absurde :

Supposons que  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  admet  $N$  comme plus grand élément ( $N \in \mathbb{N}^*$ ).

Alors comme  $2N = kN$  (avec  $k = 2 \in \mathbb{N}^*$ ), cela signifie que  $N \propto 2N$  : donc  $2N$  est plus grand (au sens de  $\propto$ ) que  $N$ . Cela est contradictoire puisque  $N$  est le plus grand élément !

Ainsi  $(\mathbb{N}^*; \propto)$  n'admet pas de plus grand élément

3. Soit  $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ , muni que la relation d'ordre  $\propto$ .

L'ensemble  $A$  possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

— Si  $(A; \propto)$  admet un plus petit élément, cela ne peut être que le plus petit élément de  $A$  (par la relation  $\leq$ ) : c'est-à-dire 4. Or  $4 \propto 5$  car il n'existe pas  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $5 = 4k$  (on aurait également pu tester avec 6, 7, 9, 10).

Donc  $(A; \propto)$  n'admet pas de plus petit élément.

— De même, le seul plus grand élément possible serait 10, or  $7 \propto 10$  car il n'existe pas  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $10 = 7k$  (on aurait également pu tester avec 4, 6, 7, 8, 9).

Donc  $(A; \propto)$  n'admet pas de plus grand élément.

### Exercice 3 [5 points]

Soit  $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $A$  par :

$$\forall (z, z') \in A^2 : z \mathcal{R} z' \iff \exists \theta \in \mathbb{R} : z' = \frac{z \cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z \sin(\theta) + \cos(\theta)}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $A$ .

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive :

—  $\mathcal{R}$  est réflexive :  $\forall z \in A : z \mathcal{R} z$ .

Soit  $z \in A$ , alors  $z \mathcal{R} z$  est vraie ssi il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = \frac{z \cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z \sin(\theta) + \cos(\theta)}$  (\*)

Puisque  $z = \frac{z \cos(0) + \sin(0)}{-z \sin(0) + \cos(0)}$ , il existe un réel  $\theta = 0 \in \mathbb{R}$  vérifiant (\*). Ainsi  $\mathcal{R}$  est réflexive.

—  $\mathcal{R}$  est symétrique :  $\forall z, z' \in A : z \mathcal{R} z' \Rightarrow z' \mathcal{R} z$ . Soit  $z, z' \in A$ , supposons  $z \mathcal{R} z'$ , montrons que  $z' \mathcal{R} z$ .

Comme  $z \mathcal{R} z'$ , alors  $\exists \theta \in \mathbb{R} : z = \frac{z' \cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z' \sin(\theta) + \cos(\theta)}$ . On en déduit que

$$z'(-z \sin(\theta) + \cos(\theta)) = z \cos(\theta) + \sin(\theta) \Leftrightarrow z(\cos(\theta) + z' \sin(\theta)) = z' \cos(\theta) - \sin(\theta).$$

Le terme  $\cos(\theta) + z' \sin(\theta)$  ne peut pas s'annuler : en effet,  $\sin$  et  $\cos$  ne peuvent s'annuler simultanément (ie  $\sin(\theta) = \cos(\theta) = 0$ ) ; et si  $\sin(\theta) \neq 0$  alors  $z' = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$  ce qui n'est pas possible (car  $z' \in A$ , ie que sa partie imaginaire est non nulle).

Ainsi, on peut alors écrire

$$z = \frac{z' \cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + z' \sin(\theta)} = \frac{z' \cos(-\theta) + \sin(-\theta)}{-z' \sin(-\theta) + \cos(-\theta)}$$

Ainsi, il existe  $\theta' = -\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = \frac{z' \cos(\theta') + \sin(\theta')}{-z' \sin(\theta') + \cos(\theta')}$ , ie  $z' \mathcal{R} z$ . Donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

—  $\mathcal{R}$  est transitive :  $\forall z, z', z'' \in A : z\mathcal{R}z' \text{ et } z'\mathcal{R}z'' \Rightarrow z\mathcal{R}z''$ .

Soit  $z, z', z'' \in A$ , supposons  $z\mathcal{R}z'$  et  $z'\mathcal{R}z''$ , montrons que  $z\mathcal{R}z''$ . Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z' = \frac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)} & (1) \\ z'\mathcal{R}z'' \Leftrightarrow \exists \theta' \in \mathbb{R} : z'' = \frac{z'\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-z'\sin(\theta') + \cos(\theta')} & (2) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{z'\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-z'\sin(\theta') + \cos(\theta')} && \# \text{ d'après (2)} \\ &= \frac{\frac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-\frac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\sin(\theta') + \cos(\theta')} && \# \text{ en mettant (1) dans (2)} \\ &= \frac{(z\cos(\theta) + \sin(\theta))\cos(\theta') + (-z\sin(\theta) + \cos(\theta))\sin(\theta')}{-(z\cos(\theta) + \sin(\theta))\sin(\theta') + (-z\sin(\theta) + \cos(\theta))\cos(\theta')} && \# \text{ en développant} \\ &= \frac{z(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')}{-z(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) + \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')} && \# \text{ en développant/factorisant} \\ &= \frac{z\cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta')}{-z\sin(\theta + \theta') + \cos(\theta + \theta')} && \# \text{ formule trigo} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\theta'' = \theta + \theta' \in \mathbb{R}$  vérifiant  $z'' = \frac{z\cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta')}{-z\sin(\theta + \theta') + \cos(\theta + \theta')}$  ie  $z\mathcal{R}z''$ . Donc  $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive}}$ .

2. Montrer que la classe d'équivalence de  $i$  ne contient qu'un seul élément.

Par définition de la classe d'équivalence :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(i) &= \{z \in A : z\mathcal{R}i\} = \left\{ z \in A : \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \frac{i\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-i\sin(\theta) + \cos(\theta)} \right\} \\ &= \left\{ z \in A : \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \frac{i(\cos(\theta) - i\sin(\theta))}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)} \right\} \\ &= \{z \in A : \exists \theta \in \mathbb{R}, z = i\} \end{aligned}$$

Finalement  $\boxed{\mathcal{R}(i) = \{i\}}$

#### Exercice 4 [4 points]

Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

1.  $f$  est-elle injective ? Surjective ?

— Supposons  $f$  injective ie  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Soit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , supposons  $f(x_1) = f(x_2)$ . Montrons  $x_1 = x_2$ . On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2}{x_2^2 + 1} && \# \text{ par définition de } f \\ &\Leftrightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 && \# \text{ par simplification} \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_2x_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - x_2x_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{1}{x_2} \quad (x_2 \neq 0) \end{aligned}$$

Ainsi  $\boxed{f \text{ est non injective}}$  : en effet, pour  $x_1 = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = 2$ , on a  $x_1 \neq x_2$  et  $f(x_1) = f(x_2) = \frac{2}{5}$ .

- Supposons  $f$  surjective ie  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ .  
 Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Cherchons  $x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ .  
 Si un tel  $x$  existe, alors il vérifie

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x}{x^2 + 1} && \# \text{ par définition de } f \\ &\Leftrightarrow y(x^2 + 1) = x && \# \text{ par simplification} \\ &\Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0 \end{aligned}$$

Ceci est un polynôme du second degré (en  $x$ ) dont il nous faut étudier l'existence des racines. En particuliers, si  $\Delta < 0$ , cette équation n'admet pas de racines, ie qu'il n'existera pas de  $x$  vérifiant  $y = f(x)$ . Résolvons donc  $\Delta < 0$  :

$$(-1)^2 - 4y^2 < 0 \iff y^2 - \frac{1}{4} > 0 \iff (y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) > 0$$

Autrement dit, pour  $y > 1/2$  ou  $y < -1/2$ , il n'existe pas de  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant  $y = f(x)$ . Donc  $f$  est non surjective.

**AUTRE MÉTHODE :**

Pour démontrer les deux résultats précédents, une petite représentation graphique (et l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires) de  $f$  aurait très largement aidé !

Étudions alors les variations de  $f$ , grâce à sa dérivée

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(1) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0			
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

2. Montrer que la restriction de  $f$  à  $[1; +\infty[$  est une bijection sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  à préciser.  
 En utilisant le tableau des variations de  $f$ , on constate que  $f$  est bijective sur  $[1; +\infty[$  à valeurs dans  $]0; 1/2]$  ( $f$  strictement décroissante).

**Exercice bonus 5 [3 points]** Considérons l'application  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui à  $x$  associe  $x^2$  :

- $f(\mathbb{R}) = \{f(x); x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$  (car  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \geq 0$ )
- $f([-3; 3]) = \{f(x); x \in [-3; 3]\} = [0; 9]$
- $f_{-1}([9; 10]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [9; 10]\} = [-\sqrt{10}; -3] \cup [3; \sqrt{10}]$
- $f_{-1}([-5; -3]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-5; -3]\} = \emptyset$  (car  $f(x) \geq 0$ )
- $f_{-1}(f([0; 1])) = f_{-1}(\{f(x); x \in [0; 1]\}) = f_{-1}([0; 1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0; 1]\} = [-1; 1]$
- $f(f_{-1}(\mathbb{R}^-)) = f(\{0\}) = \{0\}$