EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Année universitaire 2018-2019
CPI $1^{ère}$ année - Pau

DS2 du 16/11/2018

Matière : **Algèbre**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

— *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
— *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif.*
Ce DS est composé de questions de cours, trois exercices indépendants et d'un exercice bonus.

Question de cours 1 *[6.5 points]*
Soit E, F deux ensembles, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Soit $f \in \mathcal{F}(E;F)$.

1. Définir l'image directe de A et l'image réciproque de B.
2. Démontrer que :
   (a) $A \subset f_{-1}(f(A))$,
   (b) $f(f_{-1}(B)) \subset B$.
3. Donner la définition de :
   (a) l'injectivité de f,
   (b) la surjectivité de f.
4. Démontrer que :
   (a) Si f est injective, alors $A = f_{-1}(f(A))$,
   (b) Si f est surjective, alors $f(f_{-1}(B)) = B$.
5. Considérons $E = F = \{-1; 0; 1\}$, $A = \{1\}$, $B = \{-1; 1\}$ et
$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
   (a) Donner le graphe de f.
   (b) L'application f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Écrire en extension les ensembles $f_{-1}(f(A))$ et $f(f_{-1}(B))$.

Exercice 2 *[4.5 points]*
On définit la relation $\propto$ sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \quad a \propto b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka.$$

1. Montrer que $\propto$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*; \propto)$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
   Indication : pour le plus grand élément, on pourra raisonner par l'absurde ...
3. Soit $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, muni que la relation d'ordre $\propto$.
   L'ensemble A possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

Tournez svp $\rightarrow$

Exercice 3 *[5 points]*
Soit $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m(z) > 0\}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur A par :

$$\forall (z, z') \in A^2 : \quad z\mathcal{R}z' \iff \exists\, \theta \in \mathbb{R} : z' = \frac{z\operatorname{COS}(\theta) + \operatorname{SIN}(\theta)}{-z\operatorname{SIN}(\theta) + \operatorname{COS}(\theta)}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.
   Indication : COS *est paire,* SIN *impaire, et les formules trigonométriques vues en Analyse sont nos amies ...*
2. Montrer que la classe d'équivalence de i ne contient qu'un seul élément.

Exercice 4 *[4 points]*
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que la restriction de f à $[1; +\infty[$ est une bijection sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

Fin. ♣

Exercice bonus 5 *[3 points]*
Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).
Aucune justification n'est demandée.
Considérons l'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à x associe x^2. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$
2. $f([-3; 3])$
3. $f_{-1}([9; 10])$
4. $f_{-1}([-5; -3[)$
5. $f_{-1}(f([0; 1]))$
6. $f(f_{-1}(\mathbb{R}^-))$