

Année universitaire 2018-2019
CPI 1^{ère} année - Pau

Question de cours 1 [5 points] Énoncer et démontrer

1. le Théorème d'Euclide :

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^*$. **Si** $a = bq + r$ **alors** $a \wedge b = b \wedge r$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^*$. Supposons $a = bq + r$.

Alors $a = bq + r \Leftrightarrow r = a - bq$

— Un diviseur commun de a et b divise aussi bq . Donc il divise $r = a - bq$.

— Un diviseur commun à b et r divise également bq . Donc il divise $a = bq + r$.

Ainsi, les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs de b et r . En particuliers, leur pgcd est le même.

□

2. le Théorème de Gauss :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. **Si** $a \mid bc$ **et** $a \wedge b = 1$, **alors** $a \mid c$.

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Supposons $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$.

Comme $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

On multiplie cette égalité par c pour obtenir $acu + bcv = c$. Mais $a \mid acu$ et par hypothèse $a \mid bcv$ donc a divise $acu + bcv$ ie $a \mid c$.

□

Exercice 2 [3 points]

Résoudre dans \mathbb{Z} le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1 [6] \\ x \equiv 3 [10] \\ x \equiv 7 [15] \end{cases}$$

Commençons par la première équation :

$$x \equiv 1 [6] \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = 6k + 1$$

Ainsi, la seconde équation s'écrit

$$x \equiv 3 [10] \iff 6k + 1 \equiv 3 [10] \iff 6k \equiv 2 [10] \iff 3k \equiv 1 [5] \iff k \equiv 2 [5]$$

Donc $\exists k' \in \mathbb{Z} : k = 5k' + 2$. Ainsi $x = 6k + 1 = 6(5k' + 2) + 1 = 30k' + 13$.

Enfin, la dernière équation devient :

$$x \equiv 7 [15] \iff 30k' + 13 \equiv 7 [15] \iff 30k' \equiv -6 [15] \iff 0 \equiv -6 [15]$$

Ce qui est impossible ! On en conclut que ce système n'admet pas de solutions dans \mathbb{Z} .

Exercice 3 [3 points]

Trouver tous les couples d'entiers $(x; y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 11x - 5y = 10 \\ x \wedge y = 10. \end{cases}$$

Comme $x \wedge y = 10$, on a $x = 10x'$, $y = 10y'$ et $x' \wedge y' = 1$.
alors la seconde équation s'écrit

$$(E) \quad 11x - 5y = 10 \iff 11(10x') - 5(10y') = 10 \iff 11x' - 5y' = 1 \quad (E')$$

Comme $11 \wedge 5 = 1$ et $1|1$: cette équation admet des solutions.

Cherchons une solution particulière à cette équation.

On pourra remarquer (de par la simplicité des coefficients) que $11(1) - 5(2) = 1$ donc $(1, 2)$ est une solution particulière de cette équation.

Admettons que nous ne le remarquons pas : alors, d'après le théorème de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$11u + 5v = 1$$

Pour trouver ces coefficients de Bezout, effectuons l'algorithme d'Euclide sur 11 et 5, puis remontons-le :

$$11 = 5(2) + 1 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = 11(1) + 5(-2)$$

Il vient donc

$$1 = 11(1) + 5(-2) \iff 1 = 11(1) - 5(2)$$

Ainsi $(1, 2)$ est une solution particulière.

Alors, l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} de l'équation (E') est

$$\{(1 + 5k; 2 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Donc l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} de l'équation (E) est

$$\{(10 + 50k; 20 + 110k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Enfin, pour trouver les solutions dans \mathbb{N} , il nous faut trouver $I \subset \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} 10 + 50k \in \mathbb{N} \\ 20 + 110k \in \mathbb{N} \end{cases} \iff \begin{cases} 10 + 50k \geq 0 \\ 20 + 110k \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k \geq -1/5 \\ k \geq -2/11 \end{cases} \iff k \geq 0$$

Finalement, l'ensemble des solutions dans \mathbb{N} de l'équation (E) est

$$\boxed{\{(10 + 50k; 20 + 110k), k \in \mathbb{N}\}}$$

Exercice 4 [4 points] Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$$

Démontrons ce résultat par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N} : P_n : "16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n"$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n = 3^6 - 5^2 = 729 - 25 = 704 = 16 \times 44$$

donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Supposons pour un n fixé que P_n est vraie, ie

$$16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n = 16k$$

Montrons que P_{n+1} est vraie aussi, ie

$$16 \mid 3^{2(n+1)+6} - 5^{(n+1)+2} - 4(n+1) \iff \exists k' \in \mathbb{Z} : 3^{2n+8} - 5^{n+3} - 4n - 4 = 16k'$$

Pour simplifier les écritures, posons $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$ et $u_{n+1} = 3^{2n+8} - 5^{n+3} - 4n - 4$.
Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2n+8} - 5^{n+3} - 4n - 4 && \# \text{ par définition} \\ &= 9(u_n + 5^{n+2} + 4n) - 5^{n+3} - 4n - 4 && \# \text{ par jeu d'écriture} \\ &= 9u_n + (9-5)5^{n+2} + 32n - 4 && \# \text{ car } 5^{n+3} = 5^{n+2} \times 5 \\ &= 9u_n + 4 \times (5^{n+2} - 1) + 32n && \# \text{ en factorisant} \end{aligned}$$

Par hypothèse $16 \mid u_n$, donc $16 \mid 9u_n$. Il nous reste à montrer que $16 \mid 4 \times (5^{n+2} - 1) + 32n$.

On a $32n = 16 \times 2n$ donc $16 \mid 32n$.

Pour montrer que $16 \mid 4 \times (5^{n+2} - 1)$, travaillons par congruences

$$5 \equiv 1 [4] \iff 5^{n+2} \equiv 1 [4] \iff 5^{n+2} - 1 \equiv 0 [4]$$

Ainsi $4 \mid 5^{n+2} - 1$. Il en résulte que $16 \mid 4(5^{n+2} - 1)$.

On a donc $16 \mid 9u_n$, $16 \mid 32n$ et $16 \mid 4(5^{n+2} - 1)$: finalement $16 \mid u_{n+1}$. P_{n+1} est donc vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : 16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$.

Q.C.M. 5 [5 points] Réponse exacte (+0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- A - Si n est divisible par 4, alors n a au moins 4 diviseurs.
FAUX : 4 n'a que 3 diviseurs (1, 2 et 4)
- B - Si n est divisible par 8, alors n a au moins 4 diviseurs.
VRAI : 8 ayant 4 diviseurs (1, 2, 4 et 8), si $8 \mid n$ alors n a au moins ces 4 diviseurs
- C - Si n a au moins 3 diviseurs, alors n n'est pas premier.
VRAI : par définition, un nombre premier a exactement 2 diviseurs distincts (1 et lui-même)
- D - Si n a au moins 3 diviseurs, alors n est pair.
FAUX $n = 15$ a au moins 3 diviseurs (1,3, 5, 15) et n'est pas pair.
- E - Si n est pair, alors n a au moins 3 diviseurs.
FAUX $n = 2$ est pair et n'a que 2 diviseurs (1 et 2)

2. Soit $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $x \wedge y = 1$.

- A - Les entiers $x + y$ et $x - y$ sont premiers entre eux.
FAUX $x = 17$ et $y = 3$, alors $x \wedge y = 1$, $(x + y) \wedge (x - y) = 20 \wedge 14 = 2 \neq 1$
- B - Les entiers $x + 2y$ et $2x + y$ sont premiers entre eux
FAUX $x = 11$ et $y = 17$, alors $x \wedge y = 1$ et $(x + 2y) \wedge (2x + y) = 45 \wedge 39 = 3 \neq 1$.
- C - Les entiers xy et $x + y$ sont premiers entre eux.
VRAI $(x + y) \wedge x = (x + y) \wedge y = 1$ d'où $(x + y) \wedge xy = 1$
- D - Les entiers x^2y et xy^2 sont premiers entre eux.
FAUX $x = 2$ et $y = 3$, alors $x \wedge y = 1$, $x^2y \wedge xy^2 = 12 \wedge 18 = 6 \neq 1$
Rq. $x^2y \wedge xy^2 = xy(x \wedge y) = xy$

- E - Les entiers x et y sont chacun premiers avec $x + y$ et avec $x - y$.
VRAI $(x + y) \wedge x = (x + y) \wedge y = (x - y) \wedge x = (x - y) \wedge y = 1$

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels, $d \in \mathbb{N}$.

- A - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de P' est $d - 1$.
FAUX $P = 5$ alors $P' = 0$, donc $\deg(P) = 0$ et $\deg(P') = -\infty$.
- B - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de $P(X^2)$ est $2d$.
VRAI $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ si $Q \neq 0$.
- C - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de $X^2P(X + 2)$ est $d + 2$.
VRAI $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- D - Si $\deg(P) = 2$, alors le degré de $X^2 + P$ est 2.
FAUX $P = -X^2 + X$ alors $X^2 + P = X$ et $\deg(X) = 1 \neq 2$.
- E - Si $\deg(P) = 4$, alors le degré de $X^2 + P$ est 4.
VRAI $\deg(P + Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ ssi $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ sont distincts.

4. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls à coefficients réels.

- A - $\deg(P + Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
FAUX $P = X + 1, Q = -X + 1$. Alors $\deg(P + Q) = 0 \neq \deg(P) + \deg(Q) = 2$
- B - $\deg(P + Q) = \deg(P)$ ou $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.
FAUX $P = X + 1, Q = -X + 1$. Alors $\deg(P + Q) = 0 \neq \deg(P) = \deg(Q) = 1$
- C - $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
VRAI
- D - $\deg(PQ') = \deg(P'Q)$
FAUX $P = 1, Q = X$. Alors $P' = 0, Q' = 1$. Ainsi $\deg(PQ') = \deg(1) = 0 \neq \deg(P'Q) = \deg(0) = -\infty$.
- E - Le degré de $P(X^2)Q(X^2)$ est le double de la somme des degrés de P et de Q
VRAI $R = X^2$. Alors $\deg(P(X^2)Q(X^2)) = \deg((P \circ R)(Q \circ R)) = \deg((PQ) \circ R) = (\deg(P) + \deg(Q)) \times \deg(R) = 2(\deg(P) + \deg(Q))$

Exercice bonus 6 [2 points]

Montrer que $17 \mid 2(10^{16} - 1)$.

Procédons par étape :

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 10 [17] \Leftrightarrow 10^2 = 100 \equiv 15 [17] \Leftrightarrow (10^2) \equiv (-2) [17] \\ &\Leftrightarrow (10^2)^4 \equiv (-2)^4 [17] \Leftrightarrow 10^8 \equiv 16 [17] \\ &\Leftrightarrow (10^8)^2 \equiv (-1)^2 [17] \Leftrightarrow 10^{16} \equiv 1 [17] \end{aligned}$$

Ainsi $10^{16} - 1 \equiv 0 [17]$. Finalement $\boxed{2(10^{16} - 1) \equiv 0 [17] \text{ ie } 17 \mid 2(10^{16} - 1)}$

Remarque. On pouvait également utiliser le petit Théorème de Fermat (tombé l'an passé au DS3) :

Soit p un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}$. Si p ne divise pas n , alors $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

17 est premier, 17 ne divise pas 10 : donc $10^{16} \equiv 1 [17]$...