

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
 - *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note.*
 - *Le barème est signalé à titre indicatif.*
- Ce DS est composé de questions de cours, trois exercices indépendants, d'un QCM et d'un bonus.*

Question de cours 1 [5 points] Énoncer et démontrer

1. le Théorème d'Euclide,
2. le Théorème de Gauss.

Exercice 2 [3 points]

Résoudre dans \mathbb{Z} le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1 [6] \\ x \equiv 3 [10] \\ x \equiv 7 [15] \end{cases}$$

Indication : $\forall n, a, b, c \in \mathbb{N}^* : na \equiv nb [nc] \iff a \equiv b [c]$

Exercice 3 [3 points]

Trouver tous les couples d'entiers $(x; y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 11x - 5y = 10 \\ x \wedge y = 10. \end{cases}$$

Exercice 4 [4 points] Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$$

Q.C.M. 5 [5 points] **Réponse exacte (+0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).**

Aucune justification n'est demandée. **[Réponses DIRECTEMENT écrites sur votre copie]**

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - A - Si n est divisible par 4, alors n a au moins 4 diviseurs.
 - B - Si n est divisible par 8, alors n a au moins 4 diviseurs.
 - C - Si n a au moins 3 diviseurs, alors n n'est pas premier.
 - D - Si n a au moins 3 diviseurs, alors n est pair.
 - E - Si n est pair, alors n a au moins 3 diviseurs.

Tournez svp →

2. Soit $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $x \wedge y = 1$.
- A - Les entiers $x + y$ et $x - y$ sont premiers entre eux.
 - B - Les entiers $x + 2y$ et $2x + y$ sont premiers entre eux
 - C - Les entiers xy et $x + y$ sont premiers entre eux.
 - D - Les entiers x^2y et xy^2 sont premiers entre eux.
 - E - Les entiers x et y sont chacun premiers avec $x + y$ et avec $x - y$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels, $d \in \mathbb{N}$.
- A - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de P' est $d - 1$.
 - B - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de $P(X^2)$ est $2d$.
 - C - Si $\deg(P) = d$, alors le degré de $X^2P(X + 2)$ est $d + 2$.
 - D - Si $\deg(P) = 2$, alors le degré de $X^2 + P$ est 2.
 - E - Si $\deg(P) = 4$, alors le degré de $X^2 + P$ est 4.
4. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls à coefficients réels.
- A - $\deg(P + Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 - B - $\deg(P + Q) = \deg(P)$ ou $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.
 - C - $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 - D - $\deg(PQ') = \deg(P'Q)$
 - E - Le degré de $P(X^2)Q(X^2)$ est le double de la somme des degrés de P et de Q

Fin. ♣

Exercice bonus 6 [2 points]

Montrer que $17 \mid 2(10^{16} - 1)$.