

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
- *Le barème est donné à titre indicatif (sur 22).*
- *Ce DS est composé de 2 exercices indépendants (dont un avec bonus).*

**Question de cours 1 [4 points]**

Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).

Aucune justification n'est demandée. **[RÉPONSES DIRECTEMENT SUR VOTRE COPIE]**

Soient  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Compléter les pointillés par les formules appropriées :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $tr(A + B) = \dots\dots\dots$                      | 5. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ |
| 2. $tr(\alpha A) = \dots\dots\dots$                   | 6. $dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dots\dots\dots$                |
| 3. $tr({}^tA) = \dots\dots\dots$                      | 7. $(BA)^{-1} = \dots\dots\dots$                                     |
| 4. $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dots\dots\dots$ | 8. $(\alpha A)^{-1} = \dots\dots\dots$                               |

**Exercice 2 [6 points]**

Soit  $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ , et  $\varphi : F \rightarrow F$  une application linéaire définie par

$$\forall A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in F \ (a, b, c \in \mathbb{R}) : \quad \varphi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2a - b + c & 3b + c \\ -2a + b - c & 0 & 4c \\ -3b - c & -4c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .  
Donner la dimension et  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $F$ . Comment se nomme l'espace  $F$ ?
2. Déterminer  $M$  la matrice associée à  $\varphi$  dans la base canonique de  $F$ .
3. Calculer  $M^2$ . Exprimer, en fonction de  $\varphi$ , l'application linéaire associée à  $M^2$ .
4. Sans calcul, justifier que  $M \in GL_3(\mathbb{R})$  et que  $\varphi$  est un automorphisme de  $F$ .
5. Déterminer l'inverse de  $M$ .
6. Donner l'image et le noyau de  $\varphi$ .

Tournez svp  $\rightarrow$

**Exercice 3** [10 points + Bonus] Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**PARTIE I** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

1. Montrer que le noyau de  $f$  est engendré par la droite vectorielle  $a = (1, -1, 1)$ .
2. Déterminer  $b \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $f(b) = a$ .
3. Déterminer  $c \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $f(c) = c$ .
4. Supposons que  $\mathcal{C} = \{a; b; c\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer  $T = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ .
5. Donner  $Q_1$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .
6. Donner la relation entre  $A, T$  et  $Q_1$ .

**PARTIE II** Soit  $g : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application linéaire définie par

$$g(P) = (2 + X + X^2)P - (1 + 2X + X^2 + X^3)P' + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4)P''$$

Considérons  $\mathcal{E}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{F} = \{f_1 = 1 + X + X^2; f_2 = 1 + X; f_3 = 2 + X + X^2\}$  une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1. Calculer  $g(1), g(X), g(X^2)$ . En déduire que  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $B$  la matrice associée à  $g$  dans la base  $\mathcal{E}$ .
3. Déterminer  $T'$  la matrice associée à  $g$  dans la base  $\mathcal{F}$ .
4. Posons  $Q_2 = P_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ . Donner la relation entre  $B, T'$  et  $Q_2$ .

**PARTIE III** [Bonus + 2pt]

Montrer que  $A$  et  $B$  sont deux matrices semblables.

Fin. ♣

*"De deux pence de papier et de ficelle,  
Fabriquez-vous vos propres ailes,  
Et vous serez ce grand oiseau qui monte et vole,  
Tout en maintenant serré, le long fil enchanté "*