

**Exercice 1 [4 points] Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).**

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $T \in \mathbb{R}$ . Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1.  $f$  est la fonction constante égale à 2 :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2$
2.  $f$  s'annule sur  $\mathbb{R}$  :  $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
3.  $f$  n'est pas décroissante  $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$  et  $f(x) \leq f(y)$
4.  $f$  est la fonction nulle :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
5.  $f$  est positive :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$
6.  $f$  est strictement croissante :  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \implies f(x) < f(y)$
7.  $f$  est majorée par  $T$  :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq T$
8.  $f$  est impaire  $\forall x \in \mathbb{R} : -f(x) = f(-x)$

**Exercice 2 [4 points]**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 3, \\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$ .

Raisonnons pas récurrence double : posons  $P_n$  : " $u_n = 2^n + 1$ ".

— *Initialisation* :

—  $n = 0$  :

$u_n = u_0 = 2$  (d'après l'énoncé) et  $2^n + 1 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$  :  $P_0$  est donc vérifiée.

—  $n = 1$  :

$u_n = u_1 = 3$  (d'après l'énoncé) et  $2^n + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$  :  $P_1$  est donc vérifiée.

— *Hérédité* : Supposons pour  $n$  fixé que  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont vraies ie

$$u_n = 2^n + 1 \text{ (HR1)} \qquad u_{n+1} = 2^{n+1} + 1 \text{ (HR2)}$$

. Montrons que  $P_{n+2}$  est vraie aussi ie  $u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$ .

On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n && \# \text{ par définition de } u_{n+2} \\ &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) && \# \text{ par application de HR1 et HR2} \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2 && \# \text{ par développement} \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2 && \# \text{ car } 3 = 2+1 \\ &= 2^{n+2} + 2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} && \# \text{ par simplification} \\ &= 2^{n+2} + 1 && \# \text{ par simplification} \end{aligned}$$

$P_{n+2}$  est donc vraie.

— *Conclusion* : Par principe de récurrence double : pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n + 1$

**Exercice 3 [4 points]**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Démontrer

1.  $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$

Supposons  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ . Montrons  $B = C$ . Montrons cette égalité par double inclusion :

$\square$  Montrons que  $B \subset C$  ie  $\forall x \in B, x \in C$ .

Soit  $x \in B$ . Alors  $x \in A \cup B$  (car  $B \subset (A \cup B)$ ). Or  $A \cup B = A \cup C$  donc  $x \in A \cup C$ . Deux possibilités :

— Si  $x \notin A$ , comme  $x \in A \cup C$  alors  $x \in C$

— Si  $x \in A$ , comme  $x \in B$  alors  $x \in A \cap B = A \cap C$  donc  $x \in C$

Dans les deux cas,  $x \in C$ . On en déduit que  $B \subset C$ .

$\square$  Les rôles de  $B$  et  $C$  étant symétriques, la démonstration de  $C \subset B$  est analogue à la précédente. Finalement  $B = C$ .

2.  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

Démontrons cette égalité par égalités successives

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) && \# \text{ par définition de la différence} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \# \text{ par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= A \cap \overline{(B \cap C)} && \# \text{ par définition du complémentaire de } \cap \\ &= A \setminus (B \cap C) && \# \text{ par définition de la différence} \end{aligned}$$

Finalement  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

**Exercice 4 [3 points]**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Donner la formule du coefficient binomial  $C_n^k$  et celle du binôme du Newton.

La formule du coefficient binomial est  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

La formule du binôme de Newton s'applique sur deux nombres  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $ab = ba$  :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

2. En appliquant les deux définitions précédentes, calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$A = \sum_{k=0}^n C_n^k, = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

et

$$B = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = (-1 + 1)^n = 0.$$

**Exercice 5 [5 points]**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

1. La relation  $\mathcal{R}$  est définie par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \mathcal{R} B \iff A \subset B.$$

Étudier les propriétés de la relation  $\mathcal{R}$ . Que pouvez-vous en déduire ?

— Réflexivité :  $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \mathcal{R} A$

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

Par définition  $A \mathcal{R} A \iff A \subset A$ . Or  $A \subset A$  est vraie donc  $A \mathcal{R} A$  aussi.

$\mathcal{R}$  est réflexive sur  $\mathcal{P}(E)$ .

- Non symétrie :  $\exists(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \mathcal{R} B \text{ et } \overline{B \mathcal{R} A}$ .  
Prenons  $A = \emptyset$  et  $B = E$ . Alors  $\emptyset \subset E$  (donc  $A \mathcal{R} B$  est vrai) mais  $E \not\subset \emptyset$  ( $\overline{B \mathcal{R} A}$  est vrai aussi).
- Antisymétrie :  $\forall(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : (A \mathcal{R} B \text{ et } B \mathcal{R} A) \implies A = B$ .  
Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ . Supposons  $(A \mathcal{R} B \text{ et } B \mathcal{R} A)$  ie  $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$ . Montrons que  $A = B$ .  
Le résultat est immédiat car  $(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$  qui sont précisément nos hypothèses.
- Transitive :  $\forall(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 : (A \mathcal{R} B \text{ et } B \mathcal{R} C) \implies A \mathcal{R} C$ .  
Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ . Supposons  $(A \mathcal{R} B \text{ et } B \mathcal{R} C)$  ie  $(A \subset B \text{ et } B \subset C)$ .  
Montrons que  $A \mathcal{R} C$  ie  $A \subset C$ .  
Soit  $x \in A$ . Alors  $x \in B$  (car  $A \subset B$ ). Or  $B \subset C$  donc  $x \in C$ . Ainsi  $A \subset C$ .

2. La relation  $\mathcal{S}$  est définie par

$$\forall(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \mathcal{S} B \iff A \cap B \neq \emptyset.$$

Montrer que  $\mathcal{S}$  n'est pas une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$ .

$\mathcal{S}$  n'est pas une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$  si et seulement si  $\mathcal{S}$  est non réflexive ou non symétrique ou non transitive sur  $\mathcal{P}(E)$ .

- Non Réflexive :  $\exists A \in \mathcal{P}(E) : \overline{A \mathcal{S} A}$   
Prenons  $A = \emptyset$ . Alors  $A \cap A = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$  ie  $\overline{A \mathcal{S} A}$ .  
 $\mathcal{S}$  n'est pas réflexive sur  $\mathcal{P}(E)$ .  $\mathcal{S}$  n'est pas une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$
- Non symétrie :  $\exists(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \mathcal{S} B \text{ et } \overline{B \mathcal{S} A}$ .
- Non Transitive :  $\exists(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 : A \mathcal{S} B \text{ et } B \mathcal{S} C \text{ et } \overline{A \mathcal{S} C}$ .

### Exercice 6 Bonus [3 points]

Soit  $P, Q, R$  trois propositions. Donner la négation, la contraposée et la réciproque des propositions suivantes :

1.  $P \implies Q$ 
  - Négation :  $\overline{P \implies Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$
  - Contraposée :  $\overline{Q} \implies \overline{P}$
  - Réciproque :  $Q \implies P$
2.  $\overline{P \text{ ou } Q} \implies R$ 
  - Négation :  $\overline{\overline{P \text{ ou } Q} \implies R} \iff (\overline{P \text{ ou } Q} \text{ et } \overline{R}) \iff (\overline{P} \text{ et } \overline{Q} \text{ et } \overline{R})$
  - Contraposée :  $\overline{R} \implies (P \text{ ou } Q)$
  - Réciproque :  $R \implies \overline{P \text{ ou } Q}$
3.  $(P \text{ et } Q) \implies \overline{R}$ 
  - Négation :  $\overline{(P \text{ et } Q) \implies \overline{R}} \iff (P \text{ et } Q \text{ et } R)$
  - Contraposée :  $R \implies \overline{P \text{ et } Q}$
  - Réciproque :  $\overline{R} \implies (P \text{ et } Q)$