EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Année universitaire 2019-2020
PREPA1 - Pau

DS1 du 18/10/2019
Matière : **Algèbre**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif.*
  Ce DS est composé de cinq exercices indépendants et d'un exercice bonus.

Exercice 1 *[4 points]* **Réponse exacte (+0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).**
Soit f une application de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. f est la fonction constante égale à 2
2. f s'annule sur $\mathbb{R}$
3. f n'est pas décroissante
4. f est la fonction nulle
5. f est positive
6. f est strictement croissante
7. f est majorée par T
8. f est impaire

Exercice 2 *[4 points]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 3, \\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

Exercice 3 *[4 points]*
Soit E un ensemble non vide et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer

1. $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$
2. $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cap C)$

Exercice 4 *[3 points]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la formule du coefficient binomial C_n^k et celle du binôme du Newton.
2. En appliquant les deux définitions précédentes, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A = \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k.$$

Tournez svp →

Exercice 5 *[5 points]*
Soit E un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. La relation $\mathcal{R}$ est définie par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 : \quad A\,\mathcal{R}\,B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

   Étudier les propriétés de la relation $\mathcal{R}$. Que pouvez-vous en déduire ?

2. La relation $\mathcal{S}$ est définie par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 : \quad A\,\mathcal{S}\,B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

   Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Fin.

Exercice 6 *Bonus [3 points]*
Soit P, Q, R trois propositions. Donner la négation, la contraposée et la réciproque des propositions suivantes :

1. $P \Longrightarrow Q$
2. $\overline{P\, ou\, Q} \Longrightarrow R$
3. $(P\, et\, Q) \Longrightarrow \overline{R}$