

**Exercice 1 [3 points] Questions de cours Réponse exacte/fausse ( $\pm 0.75$ pt), Pas de réponse (0pt).**

1. Soit  $E, F$  deux ensembles,  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(F)$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(E; F)$ .

(a) Définir l'image directe de  $A$  et l'image réciproque de  $B$ .

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : y = f(x)\} \quad f_{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

(b) Donner la définition de la bijectivité de  $f$ .

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x).$$

2. Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ .

Quelle(s) propriété(s) doit vérifier  $\mathcal{R}$  pour être une relation d'ordre sur  $E$ ?

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $E$  si et seulement si  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive sur  $E$ .

3. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) Démontrer  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

On a  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$  de manière évidente (propriété de  $|\cdot|$ ).

Pour montrer que  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ , on pose  $z = x + iy$ . Comme  $x^2 \leq x^2 + y^2$ , il vient

$$|\operatorname{Re}(z)|^2 \leq |z|^2$$

(b) Donner la formule de Moivre.

Soit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors  $(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$

(c) Donner les formules d'Euler.

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ Alors } \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

**Exercice 2 [3 points] Relation d'équivalence sur  $\mathbb{C}$**

On définit sur  $\mathbb{C}$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 : z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{C}$ .

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si

—  $\mathcal{R}$  est réflexive sur  $\mathbb{C}$  ie  $\forall z \in \mathbb{C} : z \mathcal{R} z$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Par définition de  $\mathcal{R}$

$$z \mathcal{R} z \Leftrightarrow |z| = |z|$$

Or  $|z| = |z|$  est toujours vraie, donc  $\mathcal{R}$  est réflexive sur  $\mathbb{C}$ .

—  $\mathcal{R}$  est symétrique sur  $\mathbb{C}$  ie  $\forall z, z' \in \mathbb{C} : z \mathcal{R} z' \Rightarrow z' \mathcal{R} z$ .

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Supposons  $z \mathcal{R} z'$ , montrons que  $z' \mathcal{R} z$ . On a

$$\begin{aligned} z \mathcal{R} z' &\Leftrightarrow |z| = |z'| \quad \# \text{ par déf. de } \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow |z'| = |z| \quad \# \text{ par propriété du module et symétrie de } = \\ &\Leftrightarrow z' \mathcal{R} z \quad \# \text{ par déf. de } \mathcal{R} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{R}$  est symétrique sur  $\mathbb{C}$ .

- $\mathcal{R}$  est transitive sur  $\mathbb{C}$  ie  $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} : (z\mathcal{R}z' \text{ et } z'\mathcal{R}z'') \Rightarrow z\mathcal{R}z''$ .  
 Soit  $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ . Supposons  $z\mathcal{R}z'$  et  $z'\mathcal{R}z''$ , montrons que  $z\mathcal{R}z''$ . On a

$$\begin{aligned} z\mathcal{R}z' \text{ et } z'\mathcal{R}z'' &\iff |z| = |z'| \text{ et } |z'| = |z''| && \# \text{ par déf. de } \mathcal{R} \\ &\iff |z| = |z''| && \# \text{ par propriété du module et transitivité de } = \\ &\iff z\mathcal{R}z'' && \# \text{ par déf. de } \mathcal{R} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{R}$  est transitive sur  $\mathbb{C}$ .

Finalement  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{C}$

2. Déterminer la classe d'équivalence de  $z = 1 - 2i$ .

### Exercice 3 [3 points] Relation $\mathbb{C}$

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$  tels que  $|z| < 1$  et  $|z'| < 1$ . Montrer que

$$\left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right| < 1.$$

- On montre d'abord que l'expression proposée a bien un sens, ie que la fraction donnée existe (le dénominateur ne doit jamais s'annuler) :

On a pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  vérifiant  $|z| < 1$  et  $|z'| < 1$  :

$$1 - \bar{z}z' = 0 \iff \bar{z}z' = 1 \Rightarrow |z||z'| = |\bar{z}z'| = 1$$

exclu (car  $|z||z'| < 1$ ) ce qui montre que  $1 - \bar{z}z' \neq 0$ . L'expression proposée a bien un sens.

- Démontrons le résultat : on a pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  vérifiant  $|z| < 1$  et  $|z'| < 1$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right| < 1 &\iff |z - z'| < |1 - \bar{z}z'| && \# \text{ module strictement positif} \\ &\iff |z - z'|^2 < |1 - \bar{z}z'|^2 && \# \text{ élévation au carré} \\ &\iff (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') < (1 - \bar{z}z')(1 - \overline{\bar{z}z'}) && \# \text{ déf. du module} \\ &\iff (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') < (1 - \bar{z}z')(1 - z\bar{z}') && \# \text{ ppté du conjugué} \\ &\iff z\bar{z} - \bar{z}z' - \bar{z}'z + z'\bar{z}' < 1 - \bar{z}z' - z\bar{z}' + \bar{z}z'z\bar{z}' && \# \text{ développement} \\ &\iff 1 + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 > 0 && \# \text{ simplification et ppté du module} \\ &\iff (1 - |z|^2)(1 - |z'|^2) > 0 && \# \text{ factorisation} \end{aligned}$$

Or, comme  $|z| < 1$  et  $|z'| < 1$ , la dernière inégalité est donc toujours vérifiée. Finalement :

$$\left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right| < 1.$$

### Exercice 4 [5 points] Application

Soit  $E, F$  deux ensembles. Considérons la relation

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto (1 - x^2; y^2 + 2) \end{aligned}$$

1. Supposons  $E = F = \mathbb{R}^2$ .

(a) Justifier que  $f$  est une application bien définie.

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $1 - x^2 \in \mathbb{R}$  existe et  $y^2 + 2 \in \mathbb{R}$  existe. Ainsi  $f$  est une application bien définie.

(b) Montrer que  $f$  n'est pas injective :  $\exists (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(x', y')$  et  $(x, y) \neq (x', y')$ .

Prenons par exemple  $(x, y) = (-1, 0)$  et  $(x', y') = (1, 0)$  Alors

$$(-1, 0) \neq (1, 0) \text{ et } f(-1, 0) = (0, 2) = f(1, 0)$$

$f$  n'est donc pas injective sur  $\mathbb{R}^2$ .

- (c) Montrer que  $f$  n'est pas surjective :  $\exists (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (X, Y) \neq f(x, y)$ .  
 Prenons par exemple  $(X, Y) = (2, 0)$ . Il n'existe pas d'antécédent  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{aligned} f(x, y) = (X, Y) &\iff (1 - x^2, y^2 + 2) = (2, 0) \quad \# \text{ par def. de } f \\ &\iff (x^2, y^2) = (-1, -2) \quad \# \text{ par simplification} \end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas possible pour  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $f$  n'est donc pas surjective sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Supposons  $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$  et  $F = ]-\infty, 1] \times [2, +\infty[$ .

- (a) Montrer que  $f$  est bijective.

- Montrons que  $f$  est injective sur  $E$  :  $\forall (x, y), (x', y') \in E : f(x, y) = f(x', y') \Rightarrow (x, y) = (x', y')$ .  
 Soit  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$  ie  $x, x' \in \mathbb{R}^+$  et  $y, y' \in \mathbb{R}^-$ . Supposons  $f(x, y) = f(x', y')$ .  
 Montrons  $(x, y) = (x', y')$ . On a

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x', y') &\iff (1 - x^2; y^2 + 2) = (1 - x'^2; y'^2 + 2) \quad \# \text{ par déf. de } f \\ &\iff x^2 = x'^2 \text{ et } y^2 = y'^2 \quad \# \text{ par simplification} \\ &\iff (x = x' \text{ ou } x = -x') \text{ et } (y = y' \text{ ou } y = -y') \quad \# \text{ par résolution} \end{aligned}$$

or  $x, x' \in \mathbb{R}^+$  donc  $-x' \in \mathbb{R}^-$  ie  $x \neq -x'$  (sauf en  $x = 0$ ). De même  $y, y' \in \mathbb{R}^-$  donc  $-y' \in \mathbb{R}^+$  ie  $y \neq -y'$  (sauf en  $y = 0$ ). Ainsi

$$f(x, y) = f(x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

$f$  est bien injective sur  $E$ .

- Montrons que  $f$  est surjective sur  $F$  :  $\forall (X, Y) \in F : \exists (x, y) \in E : (X, Y) = f(x, y)$   
 Soit  $(X, Y) \in ]-\infty, 1] \times [2, +\infty[$  ie  $X \in ]-\infty, 1]$  et  $Y \in [2, +\infty[$ . Cherchons  $(x, y) \in E$  ie  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^-$  tels que  $(X, Y) = f(x, y)$ .

Si un tel  $(x, y)$  existe, alors il doit vérifier

$$\begin{aligned} (X, Y) = f(x, y) &\iff (X, Y) = (1 - x^2; y^2 + 2) \quad \# \text{ par def. de } f \\ &\iff X = 1 - x^2 \text{ et } Y = y^2 + 2 \quad \# \text{ par identification} \\ &\iff x^2 = 1 - X \text{ et } y^2 = Y - 2 \quad \# \text{ par simpl. et } (X, Y) \in ]-\infty, 1] \times [2, +\infty[ \\ &\iff x = \sqrt{1 - X} \text{ et } y = -\sqrt{Y - 2} \quad \# \text{ car } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

Ainsi,  $(x, y)$  existe (et est unique). Donc  $f$  est surjective sur  $F$ .

Finalement,  $f$  est bijective de  $E$  dans  $F$ .

- (b) Déterminer l'application réciproque de  $f$ .

Comme  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  existe et est définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto (\sqrt{1 - x}; -\sqrt{y - 2}) \end{aligned}$$

### Exercice 5 [4 points] Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$(E_1) \quad z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré, à coefficient complexes  $a = 1; b = -1 + 2i$  et  $c = 1 + 5i$ .

Son discriminant vaut  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1 + 2i)^2 - 4(1)(1 + 5i) = -7 - 24i \in \mathbb{C}$ .

On cherche  $\delta = x + iy$  (avec  $x, y \in \mathbb{R}$ ) tel que

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(\delta^2) = \operatorname{Re}(\Delta) \\ \operatorname{Im}(\delta^2) = \operatorname{Im}(\Delta) \\ |\delta^2| = |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta_1 = -3 + 4i \\ \delta_2 = -\delta_1 = 3 - 4i \end{cases}$$

Finalement,  $(E_1)$  admet deux racines :

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} = -1 + i, \quad z_2 = \frac{-b - \delta_1}{2a} = 2 - 3i.$$

2. On cherche à résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$(E_2) \quad z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i = 0.$$

(a) Montrer que  $2i$  est une solution de  $(E_2)$ .

On a

$$(2i)^3 - (2i)^2 + (5 + 7i)(2i) + 10 - 2i = -8i - (-4) + (10i - 14) + 10 - 2i = 0$$

(b) En déduire une factorisation de  $(E_2)$  de la forme  $(z - 2i)P(z)$  où  $P$  est un polynôme du second degré à coefficient complexes d'inconnue  $z$ .

Comme  $2i$  est solution de  $(E_2)$  (d'après (a)),  $(E_2)$  peut se factoriser :

$$z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

où  $a, b, c \in \mathbb{C}$  sont à déterminer. En développant, il vient :

$$(z - 2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 2ai)z^2 + (c - 2bi)z + (-2ci)$$

Par identification avec  $(E_2)$ , on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = -1 \\ c - 2bi = 5 + 7i \\ -2ci = 10 - 2i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + 2i \\ c = 1 + 5i \end{cases}$$

Ainsi,  $(E_2)$  se factorise de la manière suivante  $(z - 2i)(z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i) = 0$ .

(c) Donner toutes les solutions de  $(E_2)$ .

En utilisant 1. et 2(a),  $(E_2)$  admet finalement 3 racines  $\mathcal{S} = \{2i; -1 + i; 2 - 3i\}$ .

### Exercice 6 Bonus [2 points]

Soit  $A = [-2, 1]$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

Déterminer

1.  $f(A) = [-7; 1]$
2.  $f_{-1}(f(A)) = [-2; 2]$
3.  $\sup_{x \in A} f(x) = 1$
4.  $\inf_{x \in A} f(x) = -7$