

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 22).*
Ce DS est composé de questions de cours, quatre exercices indépendants, d'un exercice bonus et d'une phrase anti-malus.
- *Si la première ligne de votre copie n'est pas "J'ai bien lu les consignes de ce devoir", vous aurez automatiquement un point de moins (malus) sur votre note.*

Exercice 1 [4.5 points] Questions de cours **Réponse exacte/fausse (± 0.75 pt), Pas de réponse (0pt).**

1. Soit E, F deux ensembles, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Soit $f \in \mathcal{F}(E; F)$.
 - (a) Définir l'image directe de A et l'image réciproque de B .
 - (b) Donner la définition de la bijectivité de f .
2. Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire sur E .
Quelle(s) propriété(s) doit vérifier \mathcal{R} pour être une relation d'ordre sur E ?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$.
 - (a) Démontrer $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
 - (b) Donner la formule de Moivre.
 - (c) Donner les formules d'Euler.

Exercice 2 [3 points] Relation d'équivalence sur \mathbb{C}

On définit sur \mathbb{C} la relation \mathcal{R} par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 : z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{C} .
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z = 1 - 2i$.

Exercice 3 [3 points] Relation \mathbb{C}

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que

$$\left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right| < 1.$$

[Indication] Après avoir justifié que la fraction proposée existe pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on pourra mettre des modules au carré.

Tournez svp \rightarrow

Exercice 4 [5.5 points] Application

Soit E, F deux ensembles. Considérons la relation

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto (1 - x^2; y^2 + 2) \end{aligned}$$

1. Supposons $E = F = \mathbb{R}^2$.
 - (a) Justifier que f est une application bien définie.
 - (b) Montrer que f n'est pas injective.
 - (c) Montrer que f n'est pas surjective.
2. Supposons $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ et $F =]-\infty, 1] \times [2, +\infty[$.
 - (a) Montrer que f est bijective.
 - (b) Déterminer l'application réciproque de f .

Exercice 5 [4 points] Résolution d'équations dans \mathbb{C}

1. Résoudre dans \mathbb{C} :

$$(E_1) \quad z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i = 0.$$

2. On cherche à résoudre dans \mathbb{C} :

$$(E_2) \quad z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i = 0.$$

- (a) Montrer que $2i$ est une solution de (E_2) .
- (b) En déduire une factorisation de (E_2) de la forme $(z - 2i)P(z)$ où P est un polynôme du second degré à coefficient complexes d'inconnue z .
- (c) Donner toutes les solutions de (E_2) .

Fin.

Exercice 6 Bonus [2 points]

Soit $A = [-2, 1]$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

Déterminer

1. $f(A)$
2. $f_{-1}(f(A))$
3. $\sup_{x \in A} f(x)$
4. $\inf_{x \in A} f(x)$