Année universitaire 2019-2020

DS3 du 20/01/2020
Filière : **PREPA1**
Matière : **Algèbre**
Durée : **3h**
Responsable : **BARRAU Nelly**

— *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
— *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 40).*
Ce DS est composé de questions de cours, quatre exercices indépendants.
— ***[INTERDICTION D'ÉCRIRE SUR CE DOCUMENT !]***
Toute réponse écrite sur ce document ne sera pas prise en compte dans votre note.

Exercice 1 *[4 points] Questions de cours* **Réponse exacte/fausse ($\pm$ 0.5pt), Pas de réponse (0pt).**
Aucune justification n'est demandée.

1. *[Applications]* Soit E, F deux ensembles, $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ et $f \in \mathcal{F}(E; F)$.
   Donner les définitions suivantes :
   (a) l'image directe de A,
   (b) l'image réciproque de B
   (c) l'injectivité de f
   (d) la surjectivité de f
   (e) le graphe de f

2. *[Applications]* Soit E, F deux ensembles, $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ et $f \in \mathcal{F}(E; F)$.
   Compléter les propositions suivantes par "$\subset$" ou "$\supset$" ou " $=$ " :
   (a) $f_{-1}(f(A)) \dots A$
   (b) $f(f_{-1}(C)) \dots C$
   (c) $f(A \cap B) \dots f(A) \cap f(B)$

Exercice 2 *[10 points] Relation binaire - Complexes*
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On rappelle que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité se note

$$\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

1. Rappeler l'ensemble des solutions de $Z^4 = 1$.
2. Déterminer, en fonction de a, l'ensemble de complexes $z \in \mathbb{C}$ solution de

$$z^4 = a^4$$

3. On définit sur $\mathcal{U}_{12}$ la relation $\sim$ par

$$\forall (z, z') \in (\mathcal{U}_{12})^2 : \quad z \sim z' \iff z^4 = z'^4$$

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}_{12}$.
   (b) Donner les classes d'équivalences de 1, $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Tournez svp →

Exercice 3 *[10 points] Complexes*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \quad (z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

Exercice 4 *[10 points] Polynômes*
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(X) &= 2 \\ P_1(X) &= X \\ P_{n+2}(X) &= XP_{n+1}(X) - P_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que le degré de P_n vaut n et que le coefficient dominant de P_n vaut 1.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$
4. Rappeler les formules d'Euler.
5. En déduire une expression simple de $P_n(2cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer les racines de P_n et en déduire une factorisation.

Exercice 5 *[6 points] Fractions rationnelles*
Considérons

$$F(X) = \frac{1}{X^3 + 3X^2 + 2X}$$

1. Déterminer les racines complexes de $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
3. À l'aide des questions précédentes, trouver la limite de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$$

Fin.

"Je ne perds jamais : soit je gagne, soit j'apprends."
Nelson Mandela